# بسم‌الله الرحمن الرحیم

# CR+ Model

تهران-خرداد ماه ۸۹

حسین عبده تبریزی
میثم رادپور

## مبتنی بر ارزش شرکت

- CreditMetric by J. P. Morgan
- Portfolio Manager by KMV

## مبتنی بر اقتصادسنجی

- CreditPortfolio View by McKinsey & Company

## مبتنی بر آمار

- CreditRisk+ by Credit Swiss First Boston

# مدل‌های اندازه‌گیری ریسک سبد اعتباری

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

## مرحلهٔ اول

محاسبهٔ تعداد نکول موردانتظار هر بند مخاطره (Exposure Bands)

## مرحلهٔ دوم

استخراج توزیع مولد احتمال مشترک زیان اعتباری (Joint Probability Generating Function)

## مرحلهٔ سوم

استخراج تابع زیان سبد اعتباری (Credit Portfolio Loss Distribution )

# مراحل توسعهٔ مدل CR+

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

## محاسبهٔ تعداد نکول موردانتظار هر بند مخاطره

- محاسبهٔ مخاطرهٔ هر بدهکار
- محاسبهٔ زیان موردانتظار هر بدهکار
- محاسبهٔ مخاطرات بدهکاران بر حسب واحد مخاطره
- محاسبهٔ زیان موردانتظار بر حسب واحد مخاطره
- تجمیع زیان‌های موردانتظار ( بر حسب واحد) متناظر با هر بند مخاطره
- تقسیم حاصل گام 5 بر شمارهٔ بند متناظر

# گام‌های مرحلهٔ اول

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

مبلغ در معرض نکول

$$E_i = EAD_i \times LGD_i$$

زیان مشروط بر نکول

# محاسبة مخاطرة هر بدهکار

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

مبلغ در معرض نکول

احتمال نکول

$$EL_i = EAD_i \times LGD_i \times \lambda_i$$

زیان مشروط بر نکول

# محاسبهٔ زیان موردانتظار هر بدهکار

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

1

## انتخاب واحد مخاطره (Exposure Unit)

واحد مخاطره (E)باید به اندازهٔ کافی بزرگ باشد تا تعداد بندها کاهش یابد و به اندازهٔ کافی کوچک باشد تا دقت زیادی از دست نرود

2

## ایجاد بندهای مخاطره ( Exposure Bands)

$$\nu_j = \frac{E_i}{E}$$

# محاسبهٔ مخاطرات بدهکاران بر حسب واحد مخاطره

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

زیان موردانتظار

$$\varepsilon_i = \frac{EL_i}{E}$$

واحد مخاطره

$$(i \in [j], j = 1, 2, \ldots, m_E)$$

# محاسبهٔ زیان موردانتظار بر حسب واحد مخاطره

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

$$\varepsilon_{[j]} = \sum_{i \in j} \varepsilon_i$$

تجمیع زیان‌های موردانتظار ( بر حسب واحد) متناظر با هر بند مخاطره

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

تعداد نکول موردانتظار
هر بند مخاطره

$$\lambda_{[j]} = \frac{\varepsilon_{[j]}}{\nu_{[j]}}$$

تقسیم حاصل گام ۵ بر شمارهٔ بند متناظر

گام اول

- استخراج تابع مولد احتمال زیان هر بند مخاطره

گام دوم

- استخراج تابع حاصل‌ضرب توابع مولد احتمال

## گام‌های مرحلهٔ دوم

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

$$G_{L_{[j]}}(z) = \exp\left(-\lambda_{[j]} + \lambda_{[j]} z^{v_{[j]}}\right)$$

## استخراج تابع مولد احتمال هر بند مخاطره

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

$$G(z) = \prod_{j=1}^{m_E} G_{L_{[j]}}(z)$$

$$= \exp\left( -\sum_{j=1}^{m_E} \lambda_{[j]} + \sum_{j=1}^{m_E} \lambda_{[j]} z^{v_{[j]}} \right)$$

## استخراج تابع حاصل‌ضرب توابع مولد احتمال

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

اگر متغیر تصادفی X در بازهٔ اعدا صحیح غیرمنفی $[0,1,2]$ تعریف شود، می‌توان آن را به‌طور کامل با بردار احتمال زیر تشریح کرد:

$$f_x = [f_x(0), f_x(1), f_x(2), \ldots, f_x(R)]$$

- و یا بسادگی $f_x = [f_0, f_1, f_2, \ldots, f_R]$

# بردار احتمال

# تابع مولد احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_X(t) = f_0 t^1 + f_1 t^2 + f_3 t^3 + \ldots + f_z t^z$$
$$= E(t^X)$$

تابع مولد احتمال

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

متغیر تصادفی K به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Pr\{k=1\}=0.4 \quad \Pr\{k=2\}=0.3 \quad \Pr\{k=3\}=0.3$$

تابع مولد احتمال این متغیر به صورت زیر است:

$$P_K(t)=0.4t^1+0.3t^2+0.3_3t^3$$

مثال

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

# مثال

سبد اعتباری I را تنها با یک بدهکار در نظر بگیرید. فرض کنید احتمال نکول غیرشرطی این بدهکار سالانه 8% است. تابع مولد احتمال متغیر تصادفی نکول به صورت زیر است:

$$P_I = 0.92t^0 + 0.08t^1$$

اگر مبلغ در معرض نکول این سبد اعتباری 10 دلار باشد، و زیان مشروط بر نکول 100% باشد تابع مولد احتمال متغیر تصادفی ارزش سبد اعتباری به صورت زیر است:

$$P_I = 0.08t^0 + 0.92t^{10}$$

فرض کنید دو متغیر تصادفی مستقل N و K در بازهٔ اعداد صحیح غیرمنفی تعریف می‌شوند. اگر j=N+K نمایانگر مجموع این دو متغیر تصادفی باشد، توزیع احتمال J از در هم تنیدن توزیع N و K به دست می‌آید و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Pr\{J=j\}=\sum_{n=0}^{J}\Pr\{N=n\}\Pr\{K=j-n\}$$

# در هم پیچیدن توزیع‌ها

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

متغیر تصادفی N به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Pr\{n=0\}=0.5 \quad \Pr\{n=2\}=0.4 \quad \Pr\{k=5\}=0.1$$

متغیر تصادفی K به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Pr\{k=1\}=0.4 \quad \Pr\{k=2\}=0.3 \quad \Pr\{k=3\}=0.3$$

احتمال j=5 در توزیع مشترک عبارت است از:

$$\Pr\{j=5\}=\Pr\{N+K=5\}=\sum_{n=0}^{5}\Pr\{N=n\}\Pr\{K=5-n\}=0.12$$

مثال

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

# تابع مولد احتمال مشترک متغیرهای تصادفی مستقل، برابر است با حاصل‌ضرب تابع مواد احتمال آن‌ها

$$P_{N+K}(t) = E\left(t^{N+K}\right)$$

$$= E\left(t^{N}\right).E\left(t^{K}\right)$$

$$= P_N(t).P_K(t)$$

## تابع مولد احتمال مشترک

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

متغیر تصادفی N به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Pr\{n=0\}=0.5 \quad \Pr\{n=2\}=0.4 \quad \Pr\{k=5\}=0.1$$

متغیر تصادفی K به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Pr\{k=1\}=0.4 \quad \Pr\{k=2\}=0.3 \quad \Pr\{k=3\}=0.3$$

تابع مولد احتمال مشترک عبارت است از:

$$P_J = 0.20t + 0.15t^2 + 0.31t^3 + 0.12t^4 + 012t^5 + 0.04t^6 + 0.03t^7 + 0.03t^8$$

## مثال

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

توزیع احتمال مشترک متغیرهای تصادفی مستقل را به راحتی می‌توان از تابع مولد احتمال مشترک آن‌ها و بر اساس رابطهٔ زیر به ازای t=0 به‌دست آورد.

$$\Pr\{J=j\}=\frac{\left(\frac{d}{dt}\right)^{j}P_J(t)}{j!}$$

به عنوان مثال، احتمال رخداد J=5 برای مثال قبل برابر است با:

$$\Pr\{J=5\}=0.12$$

# در هم پیچیدن توزیع‌ها با استفاده از PGF

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

تفسیر: به احتمال 87.4% هیچکدام از بدهکاران مرتکب نکول نمی‌شوند. 12.2% احتمال دارد که یکی و 0.4 % احتمال دارد که هر دو مرتکب نکول شوند.

$$P_I(t) = 0.874t^0 + 0.122t^1 + 0.004t^2$$

## مثال

سبد اعتباری I را با دو بدهکار در نظر بگیرید. فرض کنید احتمال نکول غیرشرطی یکی از بدهکاران سالانه 8%، و دیگری 5% است. اگر مبلغ در معرض نکول اولی 10 دلار و دوی 5 دلار و زیان مشروط بر نکول هر دو 100 درصد باشد، تابع مولد احتمال مشترک متغیر تصادفی ارزش سبد اعتباری به صورت زیر است:

$$P_I(t) = 0.004t^0 + 0.076t^5 + 0.046t^{10} + 0.874t^{15}$$

## مثال

سبد اعتباری I را با دو بدهکار در نظر بگیرید. فرض کنید احتمال نکول غیرشرطی یکی از بدهکاران سالانه 8%، و دیگری 5% است. اگر مبلغ در معرض نکول اولی 10 دلار و دومی 5 دلار و زیان مشروط بر نکول هر دو 100 درصد باشد، تابع مولد احتمال مشترک متغیر تصادفی زیان سبد اعتباری به صورت زیر است:

$$P_I(t) = 0.874t^0 + 0.046t^5 + 0.076t^{10} + 0.004t^{15}$$

## مثال

توزیع پوآسون تنها با یک پارامتر به طور کامل تشریح می‌شود. اثبات می‌شود که تابع مولد احتمال این توزیع به صورت زیر است:

$$P_n(t) = \exp \mu(t-1)$$

بنابراین تابع مولد احتمال مشترک تعداد m متغیر تصادفی پوآسون به شرح زیر است:

$$P_n(t) = \exp \sum_{j=1}^{n} \mu_j (t-1)$$

# تابع مولد احتمال توزیع پوآسون

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

# مثال (توزیع تعداد نکول)

سبد اعتباری ا را  با دو بدهکار در نظر بگیرید. فرض کنید احتمال نکول غیرشرطی یکی از بدهکاران سالانه 5%، و  دیگری 8% است. تابع مولد احتمال مشترک متغیر تصادفی تعداد نکول سبد اعتباری به صورت زیر است:

$$P_n(t) = \exp 0.13(t-1)$$

احتمال وقوع 0 تا 5 نکول بر اساس توزیع احتمال مشترک این دو متغیر تصادفی پوآسون عبارت است از:

| n | Probability |
|---|---|
| 0 | 0.8780954 |
| 1 | 0.1141524 |
| 2 | 0.0074199 |
| 3 | 0.0003215 |
| 4 | 0.0000104 |
| 5 | 0.0000003 |

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

سبد اعتباری I را با دو بدهکار در نظر بگیرید. فرض کنید احتمال نکول غیرشرطی یکی از بدهکاران سالانه 5%، و دیگری 8% است. اگر مبلغ در معرض نکول اولی 1 دلار و دومی 2 دلار و زیان مشروط بر نکول هر دو 100 درصد باشد، تابع مولد احتمال مشترک متغیر تصادفی زیان اعتباری به صورت زیر است:

$$P_m(t) = \exp -\sum_{j=1}^{m} \mu_j + \sum_{j=1}^{m} \mu_j t^{v_j}$$

احتمال وقوع 1 تا 5 دلار زیان بر اساس توزیع احتمال مشترک این دو متغیر تصادفی پوآسون عبارت است از:

| Loss | Probability |
|---|---|
| 0 | 0.878095 |
| 1 | 0.043905 |
| 2 | 0.071345 |
| 3 | 0.003531 |
| 4 | 0.002898 |
| 5 | 0.000142 |

# مثال (توزیع زیان اعتباری)

حسین عبده تبریزی - میثم رادپور

# با تشکر