

دیرش و تحدب

DURATION & CONVEXITY

حسین عبده تبریزی

میثم رادپور

خردادماه ۹۰

فهرست موضوعات

- اوراق قرضه؛ موازنه ریسک و بازده
- اثر سررسید؛ ریسک تلاطم نرخ بهره
- دیرش
- تحذب

اوراق قرضه

موازنه ريسک و بازده

انواع اوراق قرضه بر اساس اختیار اعطایی به ناشر یا خریدار

اوراق قرضه فاقد
اختیار

Option-
free bonds

اوراق قرضه
فراخواندنی

Callable
bonds

اوراق قرضه
فروختنی

Putable
bonds

عوامل مؤثر بر بازده اوراق قرضه فاقد اختیار

ناشر

- issuer

سررسید

- Maturity

نقدشوندگی

- liquidity

نرخ سرمایه‌گذاری مجدد

- Reinvestment rate

مالیات

- Tax

ریسک‌های حاکم بر نرخ بازده

ریسک نکول

- Default risk

ریسک تلاطم نرخ بهره

- Interest rate volatility risk

ریسک سرمایه‌گذاری مجدد

- Reinvestment risk

ریسک نقدینگی

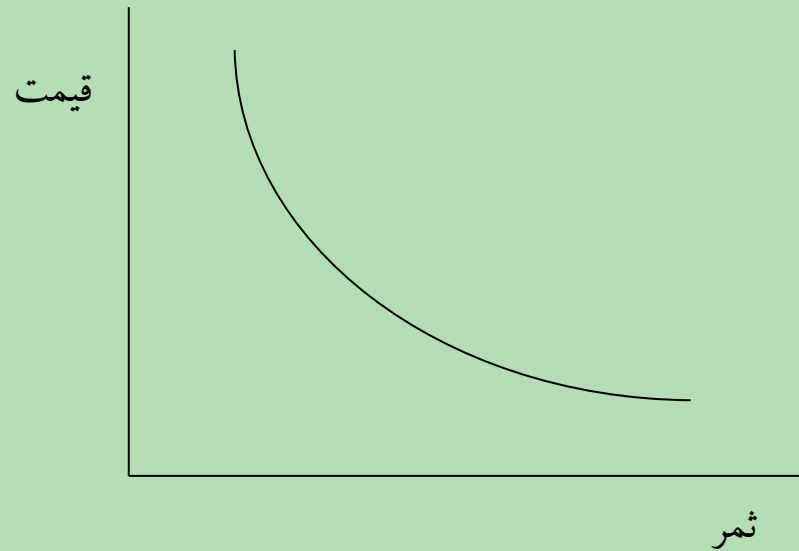
- Liquidity risk

اثر سررسید

ریسک تلاطم نرخ بهره

تلاطم قیمت در اوراق قرضه فاقد اختیار

با کاهش ثمر
(yield) قیمت
اوراق قرضه کاهش
می یابد و با افزایش
آن، قیمت اوراق
کاهش می یابد.



ویژگی‌های مرتبط با ریسک تلاطم نرخ بهره

نرخ کوپن

- در سطح معینی از ثمر (yield) و با فرض سررسید مشخص، هرچه نرخ کوپن کمتر باشد، تلاطم قیمت بیشتر است.

سررسید

- در سطح معینی از ثمر (yield) و با فرض نرخ کوپن مشخص، هرچه سررسید طولانی‌تر باشد، تلاطم قیمت بیشتر است.

ثمر تا سررسید

- در سطح معینی از نرخ کوپن و با فرض سررسید معین، هرچه بازده تا سررسید (yield to maturity) کمتر باشد، تلاطم قیمت بیشتر است.

درصد تغییرات قیمت برای چهار ورق قرضه با ثمر اولیه ۶٪

درصد تغییر قیمت				ثمر تا سررسید جدید
۹٪ - ۲۰ ساله	۹٪ - ۵ ساله	۶٪ - ۲۰ ساله	۶٪ - ۵ ساله	
۲۵.۰۴	۸.۵۷	۲۷.۳۶	۸.۹۸	%۴.۰۰
۱۱.۵۳	۴.۱۷	۱۲.۵۵	۴.۳۸	%۵.۰۰
۵.۵۴	۲.۰۶	۶.۰۲	۲.۱۶	%۵.۵۰
۱.۰۷	۰.۴۱	۱.۱۷	۰.۴۳	%۵.۹۰
۰.۱۱	۰.۰۴	۰.۱۲	۰.۰۴	%۵.۹۹
-۰.۱۱	-۰.۰۴	-۰.۱۲	-۰.۰۴	%۶.۰۱
-۱.۰۶	-۰.۴۱	-۱.۱۵	-۰.۴۳	%۶.۱۰
-۵.۱۳	-۲.۰۱	-۵.۵۵	-۲.۱۱	%۶.۵۰
-۹.۸۹	-۳.۹۷	-۱۰.۶۸	-۴.۱۶	%۷.۰۰
-۱۸.۴۰	-۷.۷۵	-۱۹.۷۹	۸.۱۱	%۸.۰۰

دیرش

سنجۀ ریسک تلاطم نرخ بهره است:

- سنجۀ حساسیت قیمت اوراق بهادار با درآمد ثابت نسبت به تغییرات نرخ بهره است.
- اثر نرخ کوپن، سررسید و ثمر تا سررسید در تلاطم قیمت اوراق بهادار با درآمد ثابت را در قالب یک عدد محاسبه ارائه می دهد.

دیرش

شاخصی برای سررسید است:

- شاخصی بهتر از سررسید است و نماینده سررسید مؤثر اوراق بهادار با درآمد ثابت است.
- میانگین وزنی استاندارد شده زمان تا سررسید (Term to maturity) اوراق بهادار با درآمد ثابت است، به طوری که اوزان، ارزش فعلی جریانهای نقدی است.

تعریف ریاضی دیرش

شاخصی است که کشش پذیری قیمت اوراق قرضه را نسبت به تغییرات نرخ بهره محاسبه می کند.

$$\text{Modified duration} = \frac{dP/P}{dy} \approx \frac{\Delta P/P}{\Delta y}$$

معادله قیمت ورق قرضه فاقد اختیار

$$P = \frac{C}{(1+y)^1} + \frac{C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{C+M}{(1+y)^n}$$

P: قیمت

C: بهره کوپن دوره‌ای

Y: ثمر تا سررسید دوره‌ای

M: ارزش اسمی (ارزش پایانی)

N: تعداد دوره‌ها

مشتق اول معادله قیمت

مشتق اول معادله قیمت نسبت به ثمر، تغییر تقریبی قیمت را به ازای تغییر کوچکی در ثمر نشان می‌دهد.

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{1}{(1+y)} \left[\frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{n(C+M)}{(1+y)^n} \right]$$

دیرش مکالی، تعدیل یافته

درصد تقریبی
تغییر قیمت

$$\frac{dP}{dy} \frac{1}{P} = -\frac{1}{(1+y)} \frac{1}{P} \left[\frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{n(C+M)}{(1+y)^n} \right]$$

دیرش مکالی

$$\text{Macaulay duration} = \frac{1}{P} \left[\frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{n(C+M)}{(1+y)^n} \right]$$

دیرش تعدیل یافته

$$\text{Modified duration} = \frac{1}{(1+y)} \frac{1}{P} \left[\frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{n(C+M)}{(1+y)^n} \right]$$

مثال ۱: محاسبهٔ دیرش

دیرش یک ورقهٔ قرضهٔ ۵ ساله با نرخ کوپن ۹ درصد و ثمر تا سررسید ۶ درصد با دورهٔ پرداخت ۶ ماهه و ارزش اسمی ۱۰۰ دلار چقدر است؟

دوره (t)	جریان نقد	ارزش فعلی	ارزش فعلی $\times t$
۱	۴.۵	۴.۳۶۸۹	۴.۳۶۸۹
۲	۴.۵	۴.۲۴۱۷	۸.۴۸۳۴
۳	۴.۵	۴.۱۱۸۱	۱۲.۳۵۴۴
۴	۴.۵	۳.۹۹۸۲	۱۵.۹۹۲۸
۵	۴.۵	۳.۸۸۱۷	۱۹.۴۰۸۷
۶	۴.۵	۳.۷۶۸۷	۲۲.۶۱۲۱
۷	۴.۵	۳.۶۵۸۹	۲۵.۶۱۲۴
۸	۴.۵	۳.۵۵۲۳	۲۸.۴۱۸۷
۹	۴.۵	۳.۴۴۸۹	۳۱.۰۳۹۹
۱۰	۱۰۴.۵	۷۷.۷۵۷۸	۷۷۷.۵۷۸۱
جمع		۱۱۲.۷۹۵۳	۹۴۵.۸۶۹۴
دیرش مکانی (به نیم سال)			۸.۳۸
دیرش مکانی (به سال)			۴.۱۹

مثال ۲: استفاده از دیرش برای تخمین تغییرات قیمت

دیرش یک ورقه قرضه ۲۰ ساله با نرخ کوپن ۹ درصد و ثمر تا سررسید ۶ درصد با دوره پرداخت ۶ ماهه و ارزش اسمی ۱۰۰ دلار چقدر برابر است با:

$$\text{Macaulay duration} = 10.98$$

$$\text{Modified duration} = \frac{10.98}{(1 + 0.03)} = 10.66$$

اگر ثمر دفعته از ۶ به ۶.۱ درصد افزایش یابد، درصد تقریبی تغییر قیمت برابر است با:

$$\frac{dP}{P} = -\text{Modified duration} \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = -\text{Modified duration} \Delta y$$

$$\frac{\Delta P}{P} = -10.66 \times (+0.001) = -1.066\%$$

اگر ثمر دفعته از ۶ به ۵.۹ درصد کاهش یابد، درصد تقریبی تغییر قیمت برابر است با:

$$\frac{\Delta P}{P} = 10.66 \times (+0.001) = 1.066\%$$

چه زمانی دیرش خوب کار نمی کند؟

- برای ورق قرضه مثال قبل، درصد تقریبی و واقعی تغییر قیمت در ازای تغییرات ثمر به شرح جدول زیر خواهد بود:

اختلاف (درصد)	درصد تقریبی تغییر قیمت (با استفاده از دیرش)	درصد واقعی تغییر قیمت (بر اساس معادله قیمت)	درصد تغییر ثمر
۰.۰۶	-۱.۶۶	-۱.۶۰	۰.۱
۰.۰۴	+۱.۶۶	+۱.۷۰	-۰.۱
۲.۹۲	-۲۱.۳۲	-۱۸.۴۰	۲
۳.۷۲	+۲۱.۳۲	+۲۵.۰۴	-۲

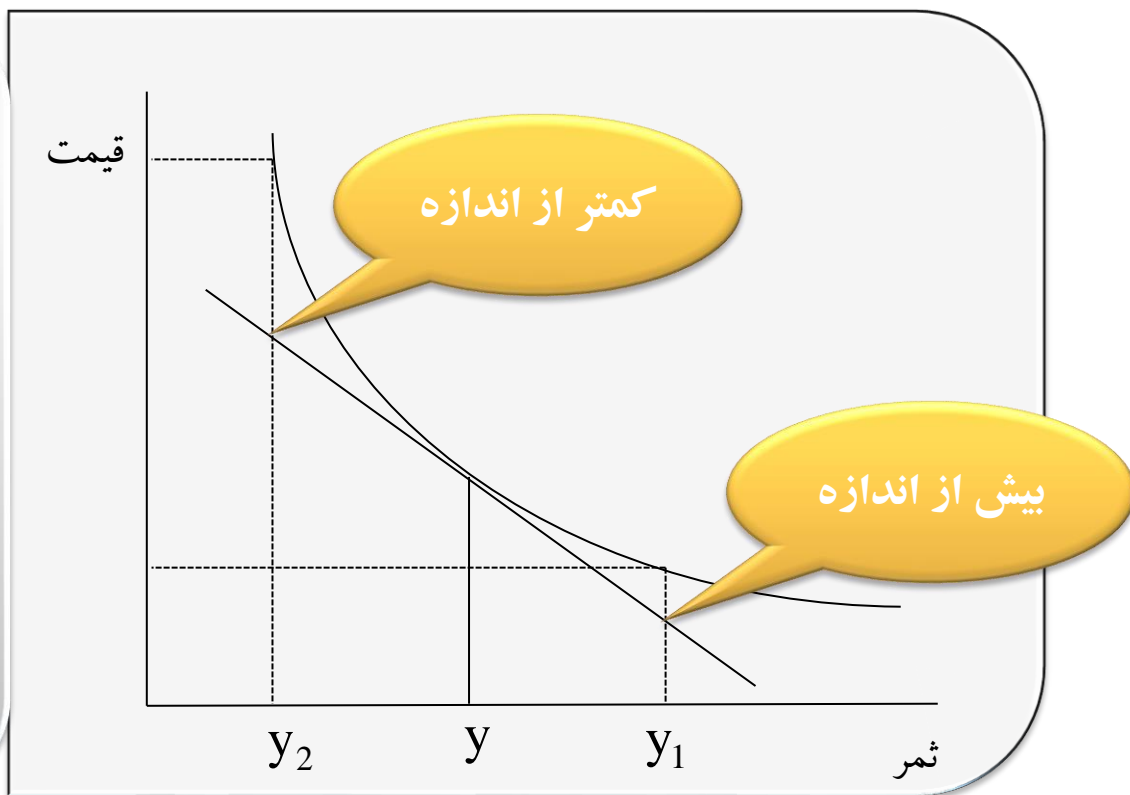
چه زمانی دیرش خوب کار نمی کند؟

زمانی که تغییرات بزرگی در ثمر ایجاد می شود؛ دیرش تقریب مناسبی از درصد تغییرات قیمت ورق قرضه به دست نمی دهد.

- زمانی که ثمر افزایش می یابد، دیرش تغییرات قیمت را بیش از اندازه برآورد می کند.
- زمانی که ثمر کاهش می یابد، دیرش تغییرات قیمت را کمتر از اندازه برآورد می کند.

چرایی نقطه ضعف دیرش

دیرش اثر انحنای تابع قیمت ورق قرضه را بر تغییرات قیمت آن لحاظ نمی‌کند.



بهبود تخمین تغییرات قیمت

سری تیلور معادله قیمت

$$dP = \frac{dP}{dy} dy + \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dy^2} \frac{1}{P} dy + \text{Error}$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dP}{dy} \frac{1}{P} dy + \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dy^2} \frac{1}{P} (dy)^2 + \frac{\text{Error}}{P}$$

محاسبه تحدب

تحدب حاصل تقسیم "مشتق دوم معادله قیمت نسبت به ثمر" بر قیمت ورق قرضه است:

$$\text{Convexity} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} \frac{1}{P}$$

$$\text{Convexity} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+y)^2} \frac{1}{P} \left[\frac{1 \times 2C}{(1+y)^1} + \frac{2 \times 3C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{n \times (n+1)(C+M)}{(1+y)^n} \right]$$

مثال ۳: محاسبهٔ تحذب

تحدب يك ورقة قرضه ۵ ساله با نرخ كوپن ۹ درصد و ثمر تا سررسيد ۶ درصد با دورهٔ پرداخت ۶ ماهه و ارزش اسمي ۱۰۰ دلار چقدر است؟

$PV \times t \times (t+1)$	ارزش فعلی (PV)	جریان نقد	دوره (t)
۸.۷۳۷۸	۴.۳۶۸۹	۴.۵	۱
۲۵.۴۵۰۲	۴.۲۴۱۷	۴.۵	۲
۴۹.۴۱۷۲	۴.۱۱۸۱	۴.۵	۳
۷۹.۹۶۴	۳.۹۹۸۲	۴.۵	۴
۱۱۶.۴۵۱	۳.۸۸۱۷	۴.۵	۵
۱۵۸.۲۸۵۴	۳.۷۶۸۷	۴.۵	۶
۲۰۴.۸۹۸۴	۳.۶۵۸۹	۴.۵	۷
۲۵۵.۷۶۵۶	۳.۵۵۲۳	۴.۵	۸
۳۱۰.۴۰۱	۳.۴۴۸۹	۴.۵	۹
۸۵۵۳.۳۵۸	۷۷.۷۵۷۸	۱۰۴.۵	۱۰
۹۷۶۲.۷۲۹	۱۱۲.۷۹۵۳	جمع	
۴۰.۷۹۲		تحدب (به نیم سال)	
۱۰.۱۹۸		تحدب (به سال)	

مثال ۲: استفاده از تحدب برای تخمین تغییرات قیمت

$$\text{Convexity} = 82.053$$

تحدب یک ورقه قرضه ۲۰ ساله با نرخ کوپن ۹ درصد و ثمر تا سررسید ۶ درصد با دوره پرداخت ۶ ماهه و ارزش اسمی ۱۰۰ دلار چقدر برابر است با:

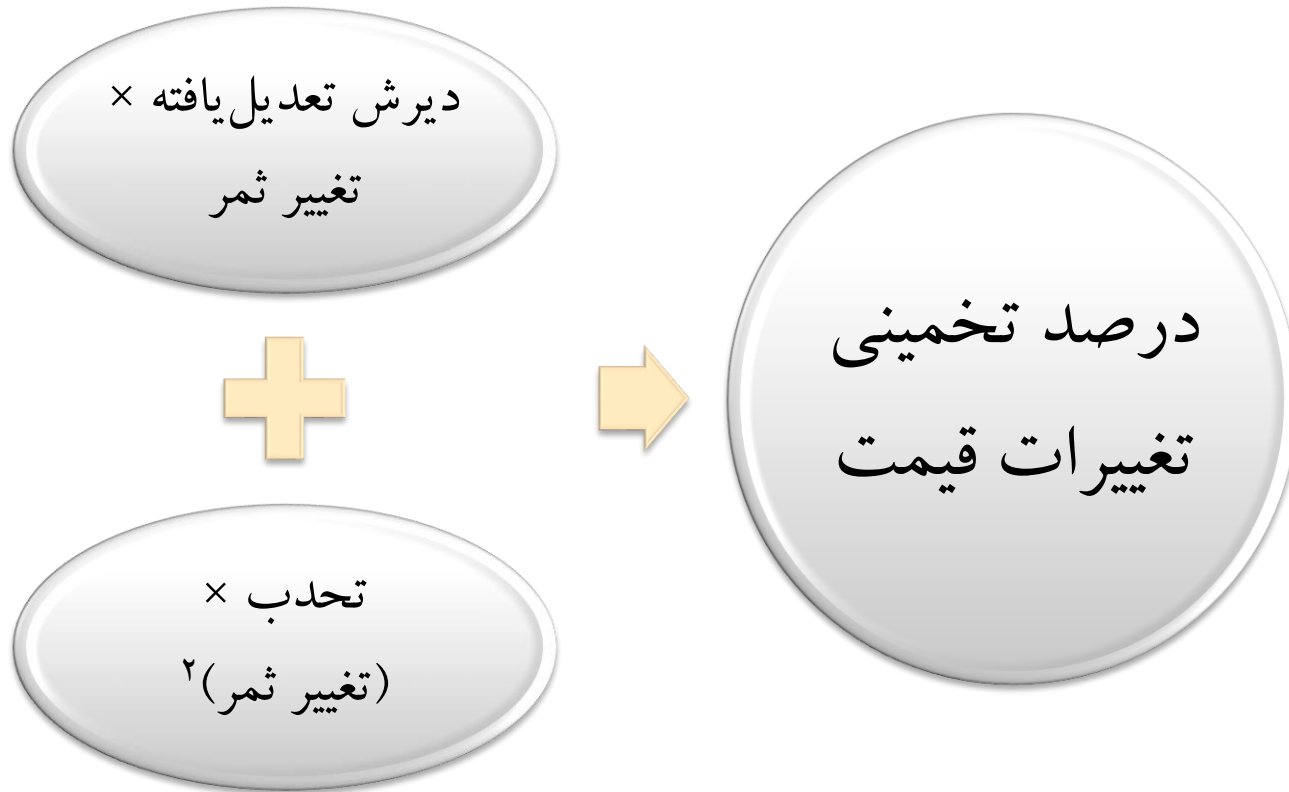
$$\frac{\Delta P}{P} = (\text{Convexity}) \times (\Delta y)^2 = 82.053 \times (0.02)^2 = 3.28\%$$

اگر ثمر دفعته از ۶ به ۸ درصد افزایش یابد، درصد تقریبی تغییر قیمت بر اساس سنجه تحدب برابر است با:

$$\frac{\Delta P}{P} = (\text{Convexity}) \times (\Delta y)^2 = 82.053 \times (-0.02)^2 = 3.28\%$$

اگر ثمر دفعته از ۶ به ۴ درصد کاهش یابد، درصد تقریبی تغییر قیمت بر اساس سنجه تحدب برابر است با:

تخمین تغییرات قیمت با استفاده از دو سنجه



مثال ۵: تخمین تغییرات قیمت و مقایسه آن با تغییرات واقعی

ورقه قرضه ۲۰ ساله با نرخ کوپن ۹ درصد و ثمر تا سررسید ۶ درصد با دوره پرداخت ۶ ماهه و ارزش اسمی ۱۰۰ دلار موجود است. اگر ثمر ۲ درصد تغییر کند درصد تغییرات واقعی و تقریبی قیمت قرضه یادشده به شرح جدول زیر است:

درصد تغییر ثمر	درصد واقعی تغییر قیمت (بر اساس معادله قیمت)	درصد تقریبی تغییر قیمت (با استفاده از دیرش و تحذب)	اختلاف (درصد)
۲	-۱۸.۴۰	-۱۸.۰۴	-۰.۳۶
-۲	+۲۵.۰۴	+۲۴.۶۰	۰.۴۴

بالتشكر