

# دیرش و تحدب

## DURATION & CONVEXITY

حسین عبده تبریزی

میثم رادپور

خردادماه ۹۰

## فهرست موضوعات

- اوراق قرضه؛ موازنه ریسک و بازده
- اثر سررسید؛ ریسک تلاطم نرخ بهره
- دیرش
- تحذب

# اوراق قرضه

موازنه ريسک و بازده

## انواع اوراق قرضه بر اساس اختیار اعطایی به ناشر یا خریدار

اوراق قرضه فاقد  
اختیار

Option-  
free bonds

اوراق قرضه  
فراخواندنی

Callable  
bonds

اوراق قرضه  
فروختنی

Putable  
bonds

## عوامل مؤثر بر بازده اوراق قرضه فاقد اختیار

ناشر

- issuer

سررسید

- Maturity

نقدشوندگی

- liquidity

نرخ سرمایه‌گذاری مجدد

- Reinvestment rate

مالیات

- Tax

## ریسک‌های حاکم بر نرخ بازده

### ریسک نکول

- Default risk

### ریسک تلاطم نرخ بهره

- Interest rate volatility risk

### ریسک سرمایه‌گذاری مجدد

- Reinvestment risk

### ریسک نقدینگی

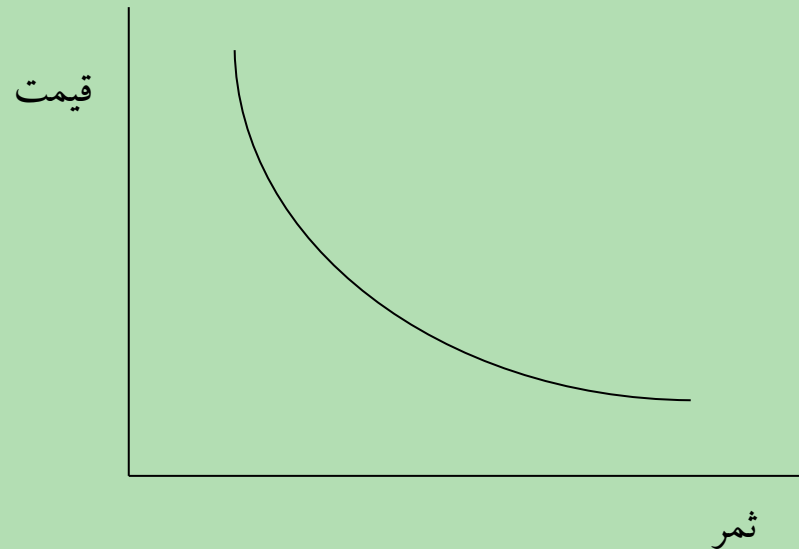
- Liquidity risk

# اثر سررسید

ریسک تلاطم نرخ بهره

## تلاطم قیمت در اوراق قرضه فاقد اختیار

با کاهش ثمر  
(yield) قیمت  
اوراق قرضه کاهش  
می یابد و با افزایش  
آن، قیمت اوراق  
کاهش می یابد.





## ویژگی‌های مرتبط با ریسک تلاطم نرخ بهره

### نرخ کوپن

- در سطح معینی از ثمر (yield) و با فرض سررسید مشخص، هرچه نرخ کوپن کمتر باشد، تلاطم قیمت بیشتر است.

### سررسید

- در سطح معینی از ثمر (yield) و با فرض نرخ کوپن مشخص، هرچه سررسید طولانی‌تر باشد، تلاطم قیمت بیشتر است.

### ثمر تا سررسید

- در سطح معینی از نرخ کوپن و با فرض سررسید معین، هرچه بازده تا سررسید (yield to maturity) کمتر باشد، تلاطم قیمت بیشتر است.

## درصد تغییرات قیمت برای چهار ورق قرضه با ثمر اولیه ۶٪

درصد تغییر قیمت				ثمر تا سررسید جدید
۹٪ - ۲۰ ساله	۹٪ - ۵ ساله	۶٪ - ۲۰ ساله	۶٪ - ۵ ساله	
۲۵.۰۴	۸.۵۷	۲۷.۳۶	۸.۹۸	%۴.۰۰
۱۱.۵۳	۴.۱۷	۱۲.۵۵	۴.۳۸	%۵.۰۰
۵.۵۴	۲.۰۶	۶.۰۲	۲.۱۶	%۵.۵۰
۱.۰۷	۰.۴۱	۱.۱۷	۰.۴۳	%۵.۹۰
۰.۱۱	۰.۰۴	۰.۱۲	۰.۰۴	%۵.۹۹
-۰.۱۱	-۰.۰۴	-۰.۱۲	-۰.۰۴	%۶.۰۱
-۱.۰۶	-۰.۴۱	-۱.۱۵	-۰.۴۳	%۶.۱۰
-۵.۱۳	-۲.۰۱	-۵.۵۵	-۲.۱۱	%۶.۵۰
-۹.۸۹	-۳.۹۷	-۱۰.۶۸	-۴.۱۶	%۷.۰۰
-۱۸.۴۰	-۷.۷۵	-۱۹.۷۹	۸.۱۱	%۸.۰۰

## دیرش

### سنجۀ ریسک تلاطم نرخ بهره است:

- سنجۀ حساسیت قیمت اوراق بهادار با درآمد ثابت نسبت به تغییرات نرخ بهره است.
- اثر نرخ کوپن، سررسید و ثمر تا سررسید در تلاطم قیمت اوراق بهادار با درآمد ثابت را در قالب یک عدد محاسبه ارائه می دهد.

## دیرش

### شاخصی برای سررسید است:

- شاخصی بهتر از سررسید است و نماینده سررسید مؤثر اوراق بهادار با درآمد ثابت است.
- میانگین وزنی استاندارد شده زمان تا سررسید (Term to maturity) اوراق بهادار با درآمد ثابت است، به طوری که اوزان، ارزش فعلی جریانهای نقدی است.

## تعریف ریاضی دیرش

شاخصی است که کشش پذیری قیمت اوراق قرضه را نسبت به تغییرات نرخ بهره محاسبه می کند.

$$\text{Modified duration} = \frac{dP/P}{dy} \approx \frac{\Delta P/P}{\Delta y}$$

## معادله قیمت ورق قرضه فاقد اختیار

$$P = \frac{C}{(1+y)^1} + \frac{C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{C+M}{(1+y)^n}$$

P: قیمت

C: بهره کوپن دوره‌ای

Y: ثمر تا سررسید دوره‌ای

M: ارزش اسمی (ارزش پایانی)

N: تعداد دوره‌ها

## مشتق اول معادله قیمت

مشتق اول معادله قیمت نسبت به ثمر، تغییر تقریبی قیمت را به ازای تغییر کوچکی در ثمر نشان می‌دهد.

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{1}{(1+y)} \left[ \frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{n(C+M)}{(1+y)^n} \right]$$

## دیرش مکالی، تعدیل یافته

درصد تقریبی

تغییر قیمت

$$\frac{dP}{dy} \frac{1}{P} = -\frac{1}{(1+y)} \frac{1}{P} \left[ \frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{n(C+M)}{(1+y)^n} \right]$$

دیرش مکالی

$$\text{Macaulay duration} = \frac{1}{P} \left[ \frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{n(C+M)}{(1+y)^n} \right]$$

دیرش تعدیل یافته

$$\text{Modified duration} = \frac{1}{(1+y)} \frac{1}{P} \left[ \frac{1C}{(1+y)^1} + \frac{2C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{n(C+M)}{(1+y)^n} \right]$$



## مثال ۱: محاسبهٔ دیرش

دیرش یک ورقهٔ قرضهٔ ۵ ساله با نرخ کوپن ۹ درصد و ثمر تا سررسید ۶ درصد با دورهٔ پرداخت ۶ ماهه و ارزش اسمی ۱۰۰ دلار چقدر است؟

دوره (t)	جریان نقد	ارزش فعلی	ارزش فعلی $\times t$
۱	۴.۵	۴.۳۶۸۹	۴.۳۶۸۹
۲	۴.۵	۴.۲۴۱۷	۸.۴۸۳۴
۳	۴.۵	۴.۱۱۸۱	۱۲.۳۵۴۴
۴	۴.۵	۳.۹۹۸۲	۱۵.۹۹۲۸
۵	۴.۵	۳.۸۸۱۷	۱۹.۴۰۸۷
۶	۴.۵	۳.۷۶۸۷	۲۲.۶۱۲۱
۷	۴.۵	۳.۶۵۸۹	۲۵.۶۱۲۴
۸	۴.۵	۳.۵۵۲۳	۲۸.۴۱۸۷
۹	۴.۵	۳.۴۴۸۹	۳۱.۰۳۹۹
۱۰	۱۰۴.۵	۷۷.۷۵۷۸	۷۷۷.۵۷۸۱
جمع		۱۱۲.۷۹۵۳	۹۴۵.۸۶۹۴
دیرش مکانی (به نیم سال)			۸.۳۸
دیرش مکانی (به سال)			۴.۱۹

## مثال ۲: استفاده از دیرش برای تخمین تغییرات قیمت

دیرش یک ورقه قرضه ۲۰ ساله با نرخ کوپن ۹ درصد و ثمر تا سررسید ۶ درصد با دوره پرداخت ۶ ماهه و ارزش اسمی ۱۰۰ دلار چقدر برابر است با:

$$\text{Macaulay duration} = 10.98$$

$$\text{Modified duration} = \frac{10.98}{(1 + 0.03)} = 10.66$$

اگر ثمر دفعته از ۶ به ۶.۱ درصد افزایش یابد، درصد تقریبی تغییر قیمت برابر است با:

$$\frac{dP}{P} = -\text{Modified duration} \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = -\text{Modified duration} \Delta y$$

$$\frac{\Delta P}{P} = -10.66 \times (+0.001) = -1.066\%$$

اگر ثمر دفعته از ۶ به ۵.۹ درصد کاهش یابد، درصد تقریبی تغییر قیمت برابر است با:

$$\frac{\Delta P}{P} = 10.66 \times (+0.001) = 1.066\%$$

## چه زمانی دیرش خوب کار نمی کند؟

- برای ورق قرضه مثال قبل، درصد تقریبی و واقعی تغییر قیمت در ازای تغییرات ثمر به شرح جدول زیر خواهد بود:

اختلاف (درصد)	درصد تقریبی تغییر قیمت (با استفاده از دیرش)	درصد واقعی تغییر قیمت (بر اساس معادله قیمت)	درصد تغییر ثمر
۰.۰۶	-۱.۶۶	-۱.۶۰	۰.۱
۰.۰۴	+۱.۶۶	+۱.۷۰	-۰.۱
۲.۹۲	-۲۱.۳۲	-۱۸.۴۰	۲
۳.۷۲	+۲۱.۳۲	+۲۵.۰۴	-۲

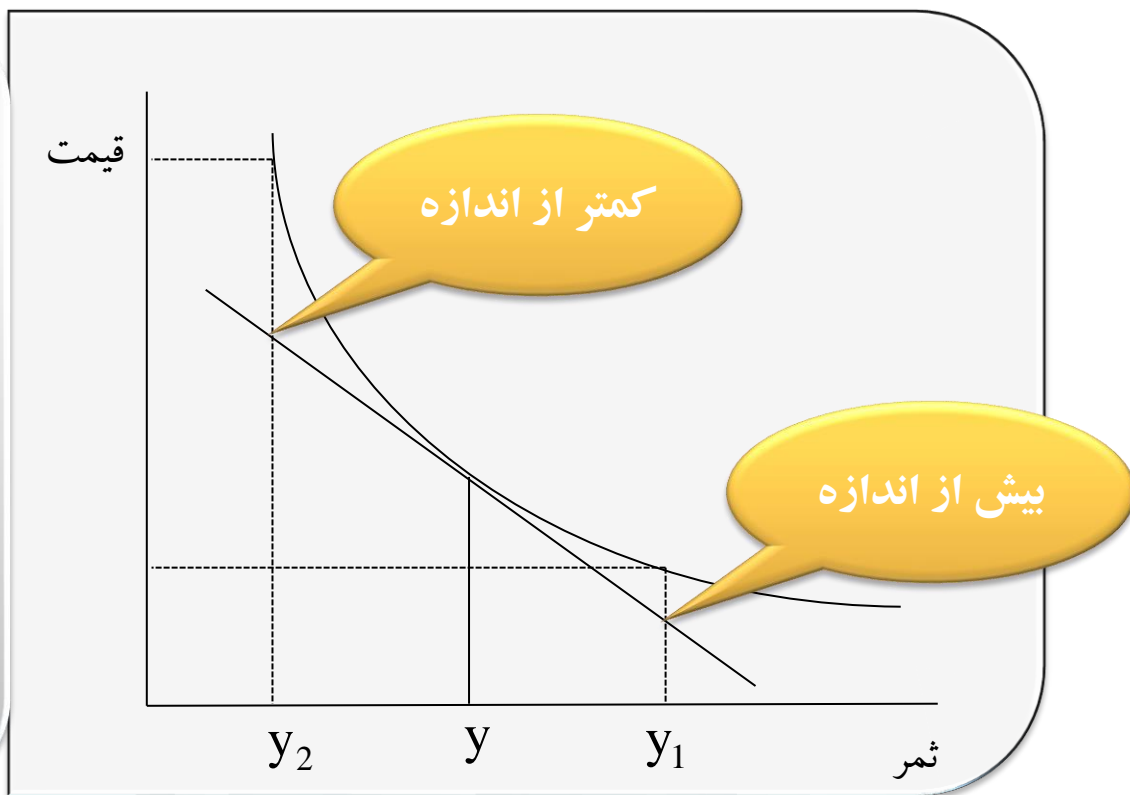
## چه زمانی دیرش خوب کار نمی کند؟

زمانی که تغییرات بزرگی در ثمر ایجاد می شود؛ دیرش تقریب مناسبی از درصد تغییرات قیمت ورق قرضه به دست نمی دهد.

- زمانی که ثمر افزایش می یابد، دیرش تغییرات قیمت را بیش از اندازه برآورد می کند.
- زمانی که ثمر کاهش می یابد، دیرش تغییرات قیمت را کمتر از اندازه برآورد می کند.

## چرایی نقطه ضعف دیرش

دیرش اثر انحنای تابع قیمت ورق قرضه را بر تغییرات قیمت آن لحاظ نمی کند.



## بهبود تخمین تغییرات قیمت

### سری تیلور معادله قیمت

$$dP = \frac{dP}{dy} dy + \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dy^2} (dy)^2 + \text{Error}$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dP}{dy} \frac{1}{P} dy + \frac{1}{2} \frac{d^2P}{dy^2} \frac{1}{P} (dy)^2 + \frac{\text{Error}}{P}$$

## محاسبه تحدب

تحدب حاصل تقسیم "مشتق دوم معادله قیمت نسبت به ثمر" بر قیمت ورق قرضه است:

$$\text{Convexity} = \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dy^2} \frac{1}{P}$$

$$\text{Convexity} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+y)^2} \frac{1}{P} \left[ \frac{1 \times 2C}{(1+y)^1} + \frac{2 \times 3C}{(1+y)^2} + \dots + \frac{n \times (n+1)(C+M)}{(1+y)^n} \right]$$

## مثال ۳: محاسبهٔ تحذب

تحدب يك ورقهٔ قرضهٔ ۵ ساله با نرخ كوپن ۹ درصد و ثمر تا سررسيد ۶ درصد با دورهٔ پرداخت ۶ ماهه و ارزش اسمي ۱۰۰ دلار چقدر است؟

دوره (t)	جریان نقد	ارزش فعلی (PV)	$PV \times t \times (t+1)$
۱	۴.۵	۴.۳۶۸۹	۸.۷۳۷۸
۲	۴.۵	۴.۲۴۱۷	۲۵.۴۵۰۲
۳	۴.۵	۴.۱۱۸۱	۴۹.۴۱۷۲
۴	۴.۵	۳.۹۹۸۲	۷۹.۹۶۴
۵	۴.۵	۳.۸۸۱۷	۱۱۶.۴۵۱
۶	۴.۵	۳.۷۶۸۷	۱۵۸.۲۸۵۴
۷	۴.۵	۳.۶۵۸۹	۲۰۴.۸۹۸۴
۸	۴.۵	۳.۵۵۲۳	۲۵۵.۷۶۵۶
۹	۴.۵	۳.۴۴۸۹	۳۱۰.۴۰۱
۱۰	۱۰۴.۵	۷۷.۷۵۷۸	۸۵۵۳.۳۵۸
	جمع	۱۱۲.۷۹۵۳	۹۷۶۲.۷۲۹
	تحدب (به نیم سال)		۴۰.۷۹۲
	تحدب (به سال)		۱۰.۱۹۸



## مثال ۲: استفاده از تحدب برای تخمین تغییرات قیمت

$$\text{Convexity} = 82.053$$

تحدب یک ورقه قرضه ۲۰ ساله با نرخ کوپن ۹ درصد و ثمر تا سررسید ۶ درصد با دوره پرداخت ۶ ماهه و ارزش اسمی ۱۰۰ دلار چقدر برابر است با:

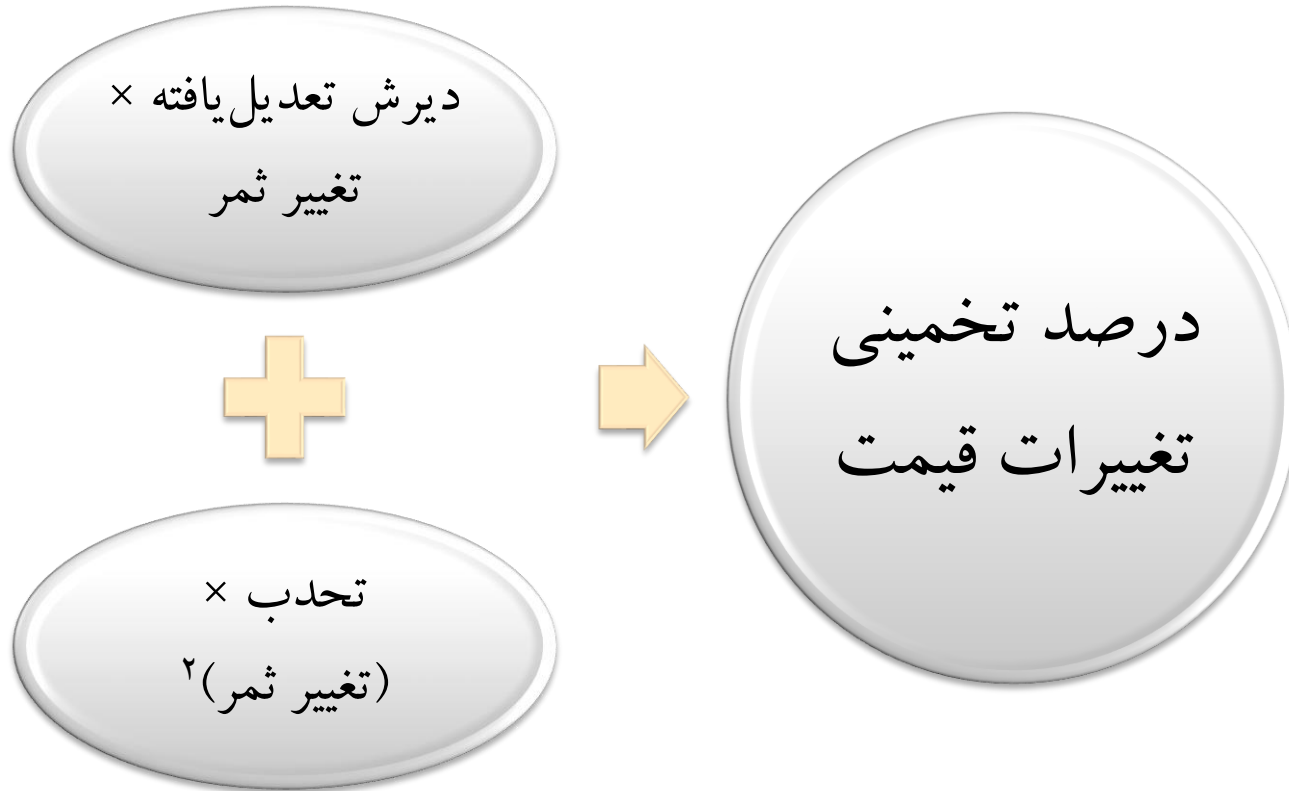
$$\frac{\Delta P}{P} = (\text{Convexity}) \times (\Delta y)^2 = 82.053 \times (0.02)^2 = 3.28\%$$

اگر ثمر دفعته از ۶ به ۸ درصد افزایش یابد، درصد تقریبی تغییر قیمت بر اساس سنجه تحدب برابر است با:

$$\frac{\Delta P}{P} = (\text{Convexity}) \times (\Delta y)^2 = 82.053 \times (-0.02)^2 = 3.28\%$$

اگر ثمر دفعته از ۶ به ۴ درصد کاهش یابد، درصد تقریبی تغییر قیمت بر اساس سنجه تحدب برابر است با:

## تخمین تغییرات قیمت با استفاده از دو سنجه



## مثال ۵: تخمین تغییرات قیمت و مقایسه آن با تغییرات واقعی

ورقه قرضه ۲۰ ساله با نرخ کوپن ۹ درصد و ثمر تا سررسید ۶ درصد با دوره پرداخت ۶ ماهه و ارزش اسمی ۱۰۰ دلار موجود است. اگر ثمر ۲ درصد تغییر کند درصد تغییرات واقعی و تقریبی قیمت قرضه یادشده به شرح جدول زیر است:

درصد تغییر ثمر	درصد واقعی تغییر قیمت (بر اساس معادله قیمت)	درصد تقریبی تغییر قیمت (با استفاده از دیرش و تحذب)	اختلاف (درصد)
۲	-۱۸.۴۰	-۱۸.۰۴	-۰.۳۶
-۲	+۲۵.۰۴	+۲۴.۶۰	۰.۴۴

بالتشكر