

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

نظریه ارزش فرین

Extreme Value Theory

حسین عبده تبریزی

میشم رادپور

عنوان: « نظریه ارزش فرین با رویکرد اندازه گیری ریسک »

توضیح مختصر:

این ارائه به نظریه ارزش فرین می پردازد. دو رویکرد نظریه ارزش فرین یعنی "نظریه ارزش فرین تعمیم یافته" و "فرا تر از آستانه" تشریح می شود. تابع چگالی احتمال، نحوه برآورد پارامترها توضیح داده می شود، و نحوه محاسبه ارزش در معرض ریسک توضیح داده می شود.

پنجم آبان ماه سال ۱۳۹۲

اول بار ارائه در کلاس تحلیل آماری پیشرفته، مقطع دکترا، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران



نظریه ارزش فرین

کلیات



رویکردها



رویدادهای فرین



احتمال بسیار پایین

اثر بسیار بالا

مسأله اساسی رویدادهای فرین

کمبود داده‌ها

کاهش قابلیت
اتکای برآوردها

نظریه ارزش فرین

تلاش‌ها برای حل مسأله ارزش‌های فرین در نهایت به ارایه نظریه ارزش فرین منجر گردید. نظریه ارزش فرین شاخه‌ای از آمار کاربردی است که برای حل چنین مسائلی توسعه یافته است.

دلایل استفاده از نظریه ارزش فرین



ارزش‌های فرین نادر است و طبق تعریف، مشاهدات کمی در دنباله‌های توزیع وجود دارد.

بر اساس مطالعات انجام گرفته وجود دنباله‌های متراکم و خصوصا غیرنرمال در سری بازده مالی مشهود است.

همیشه این احتمال وجود دارد که تحرکات فرین در قیمت دارایی‌ها توسط سازوکارهایی ایجاد شوند که به لحاظ ساختاری از عملکرد معمول بازار متفاوت باشد.

جایگاه نظریه ارزش فرین در علم آمار

طبقه‌بندی توزیع‌های آماری

مبتنی بر آمار
گرایش مرکزی

مبتنی بر آمار
ارزش فرین

رویکردهای نظریه ارزش فرین

نظریه تعمیم یافته
ارزش فرین

Generalized
Extreme
Value Theory

رویکرد فراتر از
آستانه

Peak Over
Threshold



نظریه ارزش فرین تصمیم یافته

- ✓ توابع چگالی و توزیع احتمال
- ✓ برآورد پارامترها
- ✓ محاسبه ارزش در معرض ریسک

تعریف آماری GEVT از ارزش فرین

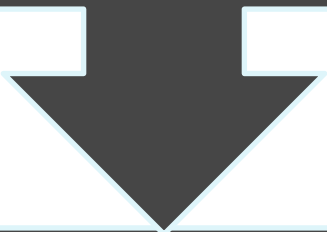
اگر $f(x)$ تابع چگالی احتمال و $F(x)$ تابع توزیع تجمعی X باشد، و توالی متغیر X را در دوره‌های $1, 2, \dots, n$ با $X_1, X_2, \dots, X_n$ نشان دهیم:

ارزش‌های فرین به عنوان حداکثرها و حداقل‌های n متغیر تصادفی تعریف می‌شود که مستقل از هم بوده و دارای توزیع‌های یکسان است.

$$X_{\min n} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad X_{\max n} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

توزیع دقیق $X_{\min,n}$ و $X_{\max,n}$

گامبل در سال ۱۹۵۸ نشان داد اگر متغیرهای $X_1, X_2, \dots, X_n$ به لحاظ آماری مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع‌های یکسانی باشند، توزیع دقیق حداکثرها را می‌توان به عنوان تابعی از توزیع مادر یعنی $F(x)$ و طول دوره انتخابی یعنی n بازگو نمود:

$$H_{\max,n}(x) = [F(x)]^n$$


به همین ترتیب توزیع دقیق حداقل‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$H_{\min,n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$$

توزیع تقریبی $X_{\max}$ و $X_{\min}$

بر اساس قضیه فیشر و تیپت، با
بزرگ شدن n ، توزیع ارزش های فرین
یعنی $X_{\min}$ و $X_{\max}$ به توزیع
تعمیم یافته ارزش فرین نزدیک می شود:

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x_{\max}) = \begin{cases} \text{if } \xi_{\max} \neq 0 \\ \exp \left\{ - \left[1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right)^{-1/\xi_{\max}} \right] \right\} \\ \text{if } \xi_{\max} = 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right] \right\} \end{cases}$$

توزیع تقریبی $X_{\max}$ و $X_{\min}$

بدیهی است، که حد رابطه اول زمانی که ξ به سمت صفر میل می کند برابر است با رابطه دوم. بر این اساس، جنکینسون پیشنهاد کرد که توزیع تعمیم یافته ارزش فرین تنها با رابطه زیر نمایش داده شود:

$$H_{\xi, \mu, \sigma}(x_{\max}) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right)^{-1/\xi_{\max}} \right] \right\}$$

پارامترهای GEVT

$\mu_{\max}$

- پارامتر موقعیت: سنجۀ گرایش مرکزی توزیع است.

$\sigma_{\max}$

- پارامتر معیار: سنجۀ پراکندگی توزیع است.

$\xi_{\max}$

- شاخص دنباله: بر شکل یا تراکم دنباله توزیع دلالت دارد.

حالت‌های خاص توزیع GEV

$$\xi_{\max} > 0$$

- توزیع تعمیم‌یافته ارزش فرین به توزیع فرشت مبدل می‌شود. این توزیع زمانی استفاده می‌شود که دنباله $F(x)$ متراکم است. توزیع‌هایی که در این طبقه جای می‌گیرد شامل توزیع لوی، توزیع t ، توزیع پرتو، کوشی و توزیع‌های مرکب است. این حالت خصوصاً برای بازده‌های مالی مفید است، چرا که عموماً دنباله‌های متراکم دارد. شاخص دنباله در اغلب بازده‌های مالی، مثبت و در عین حال کوچک‌تر از 0.35 می‌باشد.

حالت‌های خاص توزیع GEV

$$\xi_{\max} = 0$$

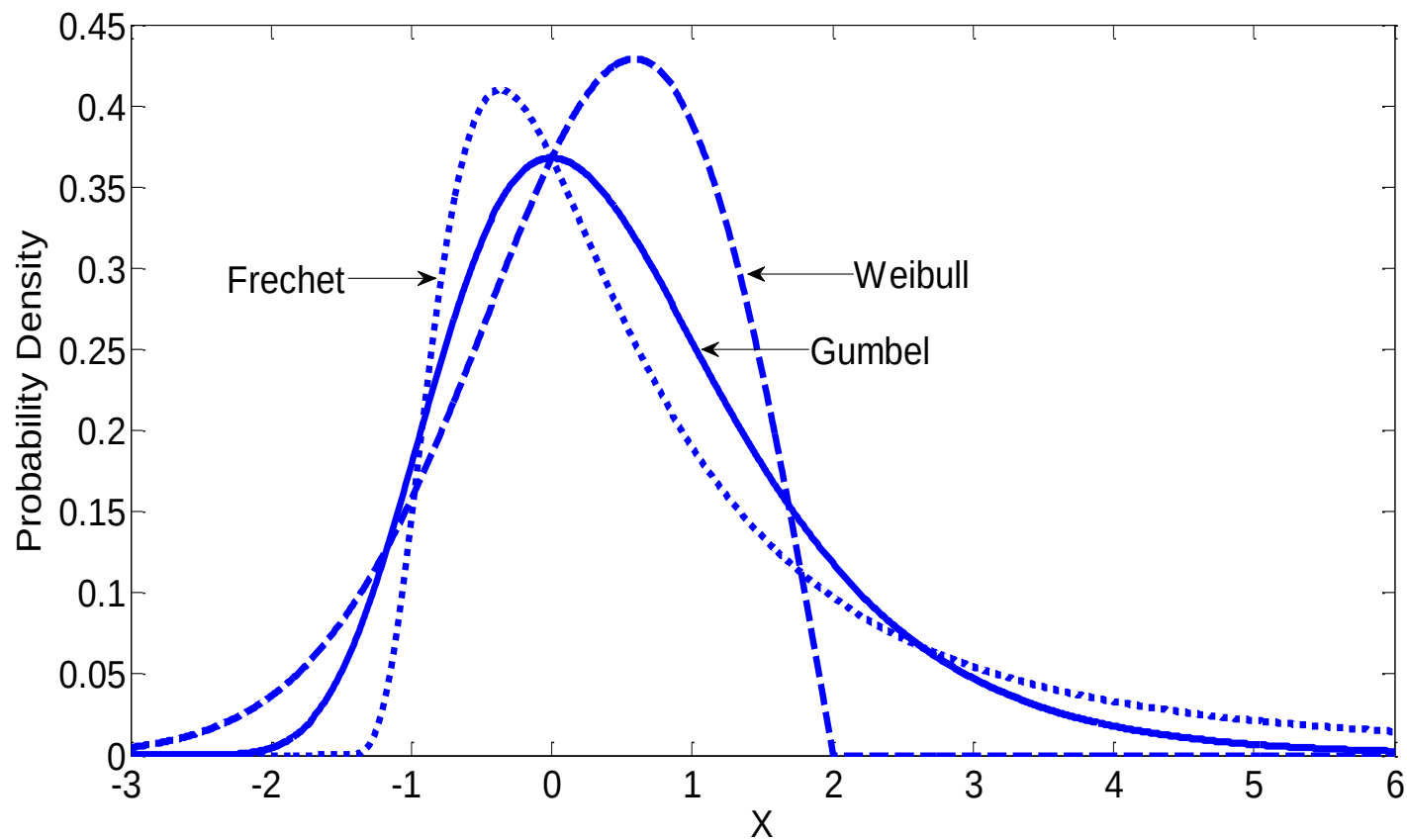
- توزیع تعمیم‌یافته ارزش فرین به توزیع گامبل تبدیل می‌شود و آن زمانی است که $F(x)$ دارای دنباله‌های توزیع نمایی باشد. دنباله‌های توزیع نمایی نسبتاً دنباله‌هایی سبک (کم‌تراکم) است. از جمله توزیع‌هایی که در دامنه جذب توزیع گامبل قرار می‌گیرد توزیع نرمال، نمایی، گاما و لاگ‌نرمال است که از میان آن‌ها تنها توزیع لاگ‌نرمال دارای دنباله نسبتاً متراکمی است.

حالت‌های خاص توزیع GEV

$$\xi_{\max} < 0$$

- توزیع تعمیم‌یافته ارزش فرین به توزیع ویبول بدل می‌گردد و آن حالتی است که $F(x)$ دارای دنباله‌هایی کم‌تراکم‌تر از دنباله‌های توزیع نرمال است. بدیهی است که توزیع ویبول خصوصاً برای مدل‌سازی بازده‌های مالی مناسب نیست، چرا که سری بازده مالی اغلب دنباله‌هایی به این کم‌تراکمی ندارد. از جمله توزیع‌هایی که در دامنه جذب توزیع ویبول قرار می‌گیرند، توزیع یکنواخت و بتا است.

توابع چگالی احتمال استاندارد GEV



تخمین پارامترهای توزیع GEV

سه روش جهت تخمین پارامترها وجود دارد:

حداکثر
درست نمایی

رگرسیون

نیمه پارامتریک

گام‌های روش حداکثر درست‌نمایی

۱. استخراج تابع چگالی
احتمال:

$$h_{\xi, \mu, \sigma}(H; x_{\max}) = \left(\frac{1}{\sigma} \right) \\ \times \left[1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right]^{-\left(\frac{1 + \xi_{\max}}{\xi_{\max}} \right)} \\ \times \exp \left[- \left(1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right) \right]^{\frac{-1}{\xi_{\max}}}$$

۲. استخراج تابع احتمال و
سپس تابع لگاریتم احتمال

$$\ln L_h = \begin{cases} \text{if } \xi_{\max} \neq 0 \\ -n_e \ln \sigma_{\max} \\ - \left(\frac{1 + \xi_{\max}}{\xi_{\max}} \right) \sum_{i=1}^{n_e} \ln \left[1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right] \\ - \sum_{i=1}^{n_e} \ln \left[1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right]^{\frac{-1}{\xi_{\max}}} \end{cases}$$

گام‌های روش حداکثر درست‌نمایی

۳. برای تخمین پارامترها کافی است که تابع لگاریتم احتمال GEV را با توجه به محدودیت زیر حداکثر نماییم:

$$1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \geq 0$$

مزایا و معایب روش حداکثر درست‌نمایی

مزایا

- روش حداکثر درست‌نمایی دارای ویژگی‌های جذابی است. از جمله این که به لحاظ آماری دارای پایه نظری محکمی است؛ برآوردکننده‌ها سازگار و در صورتی که $\hat{\theta}_{\text{ML}} \rightarrow 0$ به‌جانباً نرمال است. هم‌چنین به راحتی می‌توانیم فرضیات مربوط به پارامترها را با استفاده از آماره‌های نسبت احتمال آزمون کنیم.

معایب

- این روش هیچ راه حل بسته‌ای را برای برآورد پارامترها در اختیار قرار نمی‌دهد و از این رو کاربرد رویکرد حداکثر درست‌نمایی مستلزم استفاده از یک روش عددی و یا الگوریتم‌های جستجوی مناسب می‌باشد. استفاده از روش‌های عددی، اجبار در استفاده از یک نرم افزار مناسب را به همراه دارد و در نتیجه همیشه خطر عدم توانمندی این روش، در کمین است. علاوه بر این‌ها، از آن جا که نظریه زیربنایی این رویکرد، مجانبی است، کوچک بودن نمونه‌ها مشکلات بالقوه‌ای را ایجاد می‌کند.

گام‌های روش رگرسیون

۱. توالی ارزش‌های حداکثر را که با $X_{\max, n_e}, X_{\max, n_e-1}, \dots, X_{\max, 1}$ نشان می‌دهیم از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و به این ترتیب به آماره‌های ترتیبی ارزش‌های حداکثر یعنی دست می‌یابیم. این آماره‌ها شرط زیر را برآورده می‌سازد:

$$\hat{X}_{\max, n_e} \leq \hat{X}_{\max, n_e-1} \leq \dots \leq \hat{X}_{\max, 1}$$

۲. میانگین فراوانی تجمعی « $\hat{I}$ » امین مقدار را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{n_e - i + 1}{n_e + 1}$$

که i ، شماره آماره است و آن را در محدوده ۱ تا n_e تعریف می‌کنیم.

گام‌های روش رگرسیون

۳. روش رگرسیون، تابع توزیع تجمعی این مشاهدات مرتب‌شده را برابر میانگین نظری آنها قرار می‌دهد:

$$E[H_{\xi, \mu, \sigma}(\hat{x}_{\max, i})] = E\left[\exp\left\{-\left[1 + \xi_{\max}\left(\frac{\hat{x}_{\max, i} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)^{-1/\xi_{\max}}\right]\right\}\right]$$
$$= \frac{n_e - i + 1}{n_e + 1} \Rightarrow H_{\xi, \mu, \sigma}(\hat{x}_{\max, i}) \approx \frac{n_e - i + 1}{n_e + 1}$$

۴. از رابطه فوق، دو بار لگاریتم می‌گیریم تا به شکل ساده‌تری تبدیل شود، سپس جمله خطا را به سمت راست اضافه می‌کنیم تا به یک تساوی تبدیل گردد:

$$-\frac{1}{\xi_{\max}} \log\left[1 + \xi_{\max}\left(\frac{\hat{x}_{\max, i} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]$$
$$= \log\left[-\log\left(\frac{n_e - i + 1}{n_e + 1}\right)\right] + \varepsilon_i$$

گام‌های روش نیمه پارامتریک

گام اول

- از برآوردکننده‌های نیمه پارامتریک اغلب برای برآورد شاخص دنباله استفاده می‌شود و معروف‌ترین آن‌ها برآوردکننده هیل است. این برآوردکننده مستقیماً از مشاهدات مرتب‌شده حاصل می‌شود. اگر توالی مشاهدات مرتب‌شده را از بزرگ به کوچک به صورت زیر نشان دهیم:

$$X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{k,n}$$

گام دوم

- برآوردکننده هیل با رابطه زیر تعریف می‌شود:

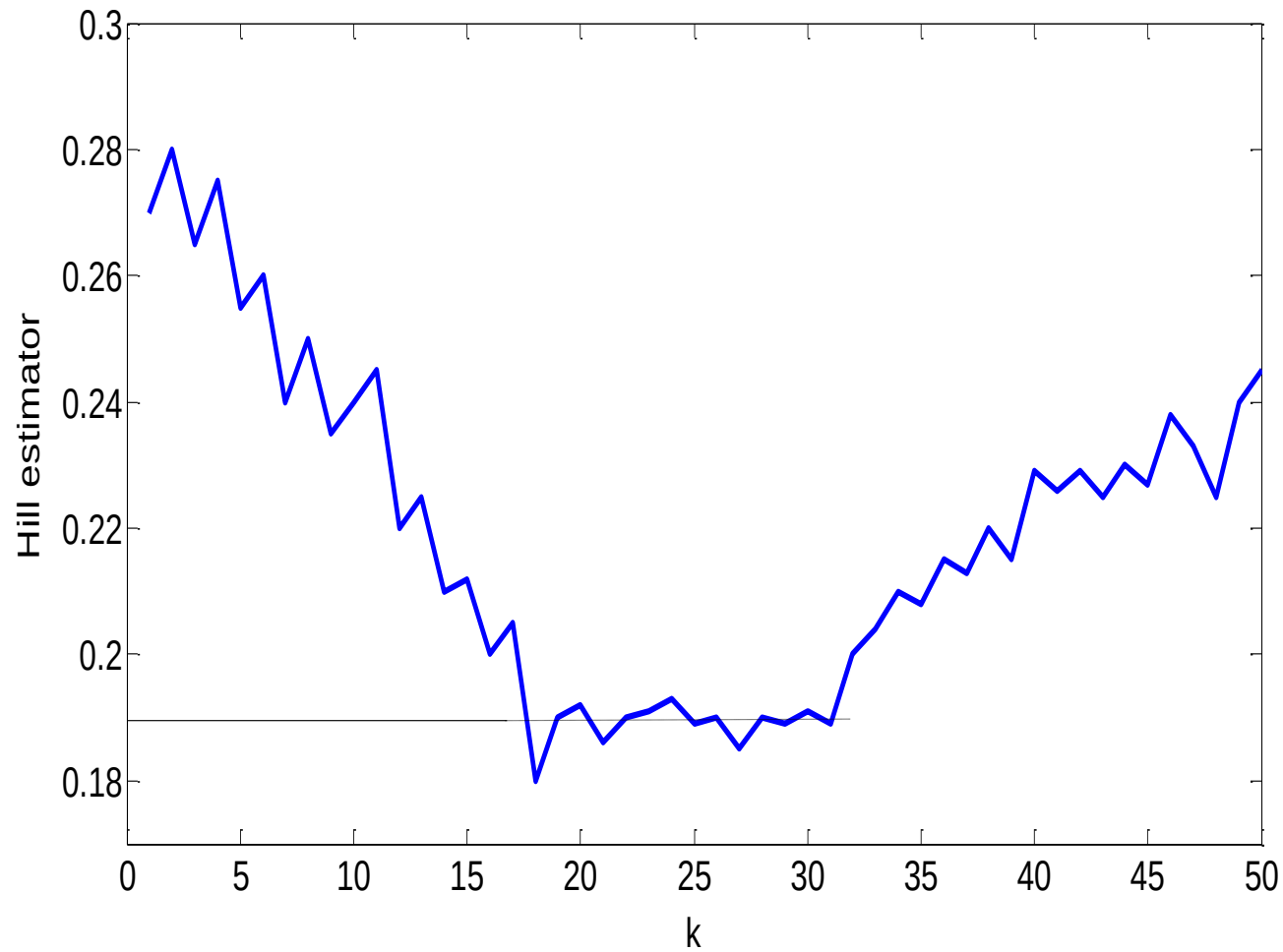
$$\hat{\xi} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \ln X_{i,n} - \ln X_{k,n} \quad \text{for } k \geq 2$$

روش نیمه پارامتریک

گام سوم

- اگر نمودار هیل برای برخی از مقادیر K نسبتاً با ثبات (افقی) باشد، مقادیری از K که باعث ایجاد چنین ثباتی شده‌اند، برآوردی منطقی از شاخص دنباله فراهم می‌آورد.

روش نیمه پارامتریک



محاسبه چندک‌های توزیع GEV

گام اول

$$\ln p = \begin{cases} -\left[1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)^{-1/\xi_{\max}}\right] & \text{if } \xi_{\max} \neq 0 \\ -\exp\left[-\left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right] & \text{if } \xi_{\max} = 0 \end{cases}$$

برای محاسبه چندک‌های توزیع GEV، سمت چپ تابع توزیع تجمعی GEV را برابر p قرار می‌دهیم. بدیهی است که p احتمال تجمعی توزیع GEV است. سپس از طرفین رابطه لگاریتم می‌گیریم. پس از انجام این عملیات خواهیم داشت:

گام دوم

$$x_{\max} = \begin{cases} \mu_{\max} - \left(\frac{\sigma_{\max}}{\xi_{\max}}\right) \left[1 - (-\ln p)^{-\xi}\right] & \text{if (Frechet, } \xi > 0) \\ \mu_{\max} - \sigma_{\max} [\ln(-\ln p)] & \text{if (Gumbel, } \xi = 0) \end{cases}$$

سپس مقدار $x_{\max}$ را از آن خارج می‌کنیم:

مثال: محاسبه چندک‌های گامبل

برای توزیع استاندارد گامبل ($\mu=0, \sigma=1$) صدک پنجم و نود و پنجم برابر است با:

$$-\ln[-\ln(0.05)] = -1.0972$$

$$-\ln[-\ln(0.095)] = 2.9702$$

مثال: محاسبه چندک‌های فرشت

در توزیع استاندارد فرشت با $\xi_{\max} = 0.2$ ، صدک پنجم و نود و پنجم برابر است با:

$$-(1/0.2)[1 - (-\ln(0.05))]^{-0.2} = -0.9851$$

$$-(1/0.2)[1 - (-\ln(0.95))]^{-0.2} = 4.0564$$

در توزیع استاندارد فرشت با $\xi_{\max} = 0.3$ ، صدک پنجم و نود و پنجم برابر است با:

$$-(1/0.3)[1 - (-\ln(0.05))]^{-0.3} = -0.9349$$

$$-(1/0.3)[1 - (-\ln(0.95))]^{-0.3} = 4.7924$$

محاسبه ارزش در معرض ریسک

برای این که بتوانیم صدک‌های مربوط به توزیع ارزش‌های فرین را به صدک‌های توزیع مادر منتقل کنیم، باید به گونه‌ای بین احتمالات این دو توزیع رابطه برقرار نماییم. برای این کار از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$H_{\max,n}(x) = [F(x)]^n$$

که $H_{\max,n}(x)$ و $F(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{\max,n}(x) = \Pr\{X_{\max} \leq x_{\max}\} = p$$

$$F(x) = \Pr\{X \leq x_{\max}\} = 1 - \alpha$$

و n اندازه نمونه‌هایی است که ارزش‌های فرین از آن‌ها استخراج شده‌اند.

محاسبه ارزش در معرض ریسک

با جایگذاری رابطه فوق در معکوس تابع توزیع تجمعی
GEV، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$X = \begin{cases} \text{if (Frechet, } \xi > 0) \\ \mu_{\max} - \left(\frac{\sigma_{\max}}{\xi_{\max}} \right) \left[1 - (-n \ln(1 - \alpha))^{-\xi_{\max}} \right] \\ \\ \text{if (Gumbel, } \xi = 0) \\ \mu_{\max} - \sigma_{\max} [\ln(-n \ln(1 - \alpha))] \end{cases}$$

مثال: ارزش در معرض ریسک فرشت

- فرض کنید پارامترهای مربوط به توزیع ارزش‌های فرین بازده یک سهم از توزیع فرچت با مشخصات زیر پیروی می‌کند:

$$\mu_{\max} = 2\%$$

$$\sigma_{\max} = 0.7\%$$

$$\xi_{\max} = 0.3$$

- هم‌چنین فرض کنید ارزش‌های فرین از نمونه‌هایی با اندازه ۱۰۰ مشاهده حاصل شده‌اند. قیمت جاری این سهم ۱,۰۰۰ تومان است. ارزش در معرض ریسک در سطح اطمینان ۹۹/۵٪ عبارت است از:

$$q_{99.5\%}(r) = 0.02 - \left(\frac{0.007}{0.3} \right) \times \left[1 - (-100 \times \ln(0.995))^{-0.03} \right]$$
$$= 0.02537$$

$$VaR = 1000 \times 0.02537 = 253.7$$

- و در سطح اطمینان ۹۹/۹٪ داریم:

$$q_{99.9\%}(r) = 0.02 - \left(\frac{0.007}{0.3} \right) \times \left[1 - (-100 \times \ln(0.999))^{-0.03} \right]$$
$$= 0.04322$$

$$VaR = 1000 \times 0.04322 = 432.2$$

مثال: ارزش در معرض ریسک گامبل

- فرض کنید پارامترهای مربوط به توزیع ارزش‌های فرین بازده یک سهم از توزیع فرچت با مشخصات زیر پیروی می‌کند:

$$\mu_{\max} = 2\% \quad \sigma_{\max} = 0.7\%$$

- هم‌چنین فرض کنید ارزش‌های فرین از نمونه‌هایی با اندازه ۱۰۰ مشاهده حاصل شده‌اند. قیمت جاری این سهم ۱,۰۰۰ تومان است. ارزش در معرض ریسک در سطح اطمینان ۹۹/۵٪ عبارت است از:

$$q_{99.5\%}(r) = 2 - 0.007 \times \ln[-100 \times \ln(0.995)] = 0.02483$$

$$VaR = 1000 \times 0.02483 = 248.3$$

- و در سطح اطمینان ۹۹/۹٪ داریم:

$$q_{99.9\%}(r) = 2 - 0.007 \times \ln[-100 \times \ln(0.999)] = 0.03612$$

$$VaR = 1000 \times 0.03612 = 361.2$$



رویکرد فراتر از آستانه

- ✓ توابع چگالی و توزیع احتمال
- ✓ برآورد پارامترها
- ✓ محاسبه ارزش در معرض ریسک

رویکرد POT در مواجهه با رخدادهای فرین

همان گونه که نظریه تعمیم یافته ارزش فرین راه حلی بدیهی برای مدل سازی حداکثرها و حداقلهاست، رویکرد فراتر از آستانه نیز روشی بدیهی برای مدل سازی تخطی ها از یک آستانه بزرگ است. به عبارتی دیگر ما تنها به دنبال مشاهدات حداکثر یا حداقل نیستیم، بلکه تخطی مشاهدات فرین از یک آستانه بزرگ نیز برایمان جالب توجه است.

POT و GEVT

نظریه تعمیم یافته ارزش فرین

- توزیع حداکثرها و حداقلها

رویکرد فراتر از آستانه

- توزیع فراتر از آستانه

تعریف آماری فراتر از آستانه

اگر نمونه مشاهدات را به صورت زیر نشان دهیم:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$



و تابع توزیع آن را با $F(x)$ و مقدار آستانه را با u نشان دهیم، $F(u)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(u) = \Pr\{X_i \leq u\}$$



تخطی زمانی اتفاق می افتد که برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم:

$$X_i > u$$

تعریف آماری فراتر از آستانه

مقدار اضافی فراتر از آستانه را نیز به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$y_i = X_i - u$$



و برای احتمالات $X_i \leq y_i + u$ خواهیم داشت:

$$\Pr\{X_i \leq y_i + u\} = F(y_i + u)$$



به این ترتیب برای توزیع احتمال مقادیر اضافی فراتر از آستانه u خواهیم داشت:

$$F_u(y) = \Pr\{X_i - u \leq y_i \mid X_i > u\}$$

تعریف آماری فراتر از آستانه

که $F_u(y)$ نمایانگر احتمال تخطی X حداکثر به اندازه y از آستانه u است، البته مشروط بر این که X از u فراتر رفته باشد. این احتمال مشروط را می توان به صورت زیر نوشت:

$$F_u(y) = \frac{\Pr\{X_i - u \leq y_i, X_i > u\}}{\Pr(X > u)}$$



که در نتیجه خواهیم داشت:

$$F_u(y) = \frac{F(y_i + u) - F(u)}{1 - F(u)} \Rightarrow F(x) = [1 - F(u)]F_u(y) + F(u)$$

قضیه فراتر از آستانه

بالکما و دی‌هان و نیز پیکاندس طی قضیه‌ای نشان دادند که برای « U »‌هایی که به اندازه کافی بزرگ است، تابع توزیع مقادیر فراتر از آستانه یعنی $F_u(y)$ را می‌توان با توزیع تعمیم‌یافته پرتو تقریب زد. توزیع تعمیم‌یافته پرتو را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G_{\xi, \mu, \sigma}(x_{\max}) = 1 - \left[1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right]^{-1/\xi_{\max}}$$

GEV و GPD

رابطه ساده‌ای بین GEV و GPD وجود دارد:

$$G_{\xi, \mu, \sigma}(x_{\max}) = 1 + \log H_{\xi, \mu, \sigma}(x_{\max})$$

if $\log H_{\xi, \mu, \sigma}(x_{\max}) > -1$

پارامترهای GEVT

u

- پارامتر موقعیت: سنجۀ گرایش مرکزی توزیع است.

$\sigma_{\max}$

- پارامتر معیار: سنجۀ پراکندگی توزیع است.

$\xi_{\max}$

- شاخص دنباله: بر شکل یا تراکم دنباله توزیع دلالت دارد.

حالت‌های خاص GPD

اگر $\xi_{\max} > 0$

- توزیع تعمیم‌یافته پرتو دارای دنباله‌ای نسبتاً متراکمی خواهد بود. در این حالت توزیع‌هایی مانند t در دامنه جذب آن قرار می‌گیرد.

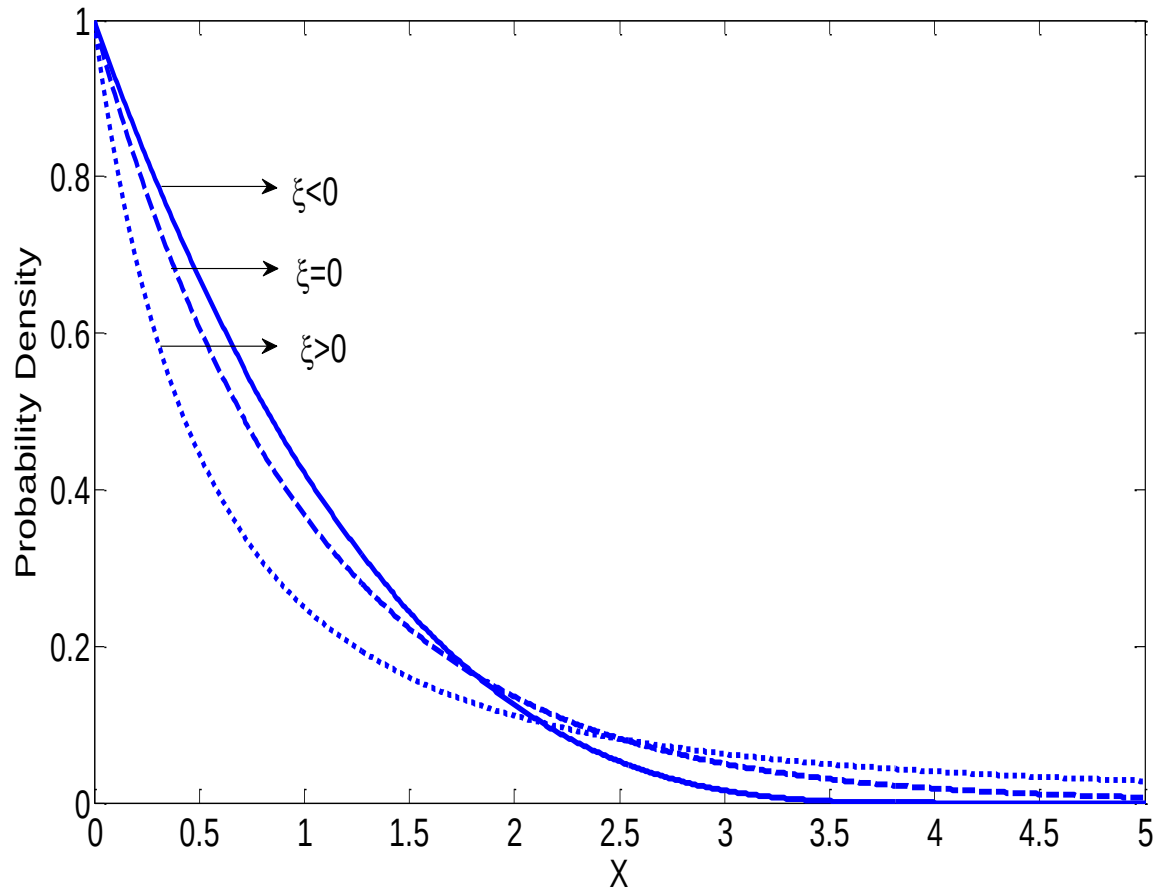
اگر $\xi_{\max} = 0$

- توزیع تعمیم‌یافته پرتو دارای دنباله‌ای با تراکم متوسط است. در این حالت توزیع‌هایی مانند نرمال در دامنه جذب آن قرار می‌گیرد.

اگر $\xi_{\max} < 0$

- توزیع تعمیم‌یافته پرتو دنباله‌ای نسبتاً کم‌تراکم دارد. در این حالت توزیع‌هایی مانند بتا در دامنه جذب آن قرار می‌گیرد.

توابع چگالی احتمال استاندارد GPD



بر آورد پارامترها: انتخاب U

برای تخمین پارامترها باید یک مقدار منطقی برای آستانه U انتخاب کنیم. این آستانه تعیین کننده تعداد مشاهدات فراتر از آستانه یعنی است. مبانی نظری ضعیفی برای انتخاب آستانه وجود دارد و این یکی از نقاط ضعف نظریه فراتر از آستانه است. بدین ترتیب این انتخاب بیشتر به قضاوت‌های ما مربوط می‌شود. هرچند تخمین این پارامتر از طریق حداکثر درست‌نمایی طبیعی‌ترین راه به نظر می‌رسد، اما این رویکرد از ثبات برخوردار نیست. با تغییر آستانه، تعداد مشاهدات فراتر از آستانه تغییر می‌کند و این امر موجب ایجاد تابع احتمال ناپیوسته و اغلب نامحدود می‌شود.

برآورد پارامترها: انتخاب U



✓ بزرگی آستانه
✓ دقت برآورد
✓ تورش



✓ تعداد مشاهدات
✓ قابلیت اتکا
✓ واریانس



ابزارهای شناسایی دنباله

نمودار چندک-چندک

quantile-
quantile
plot

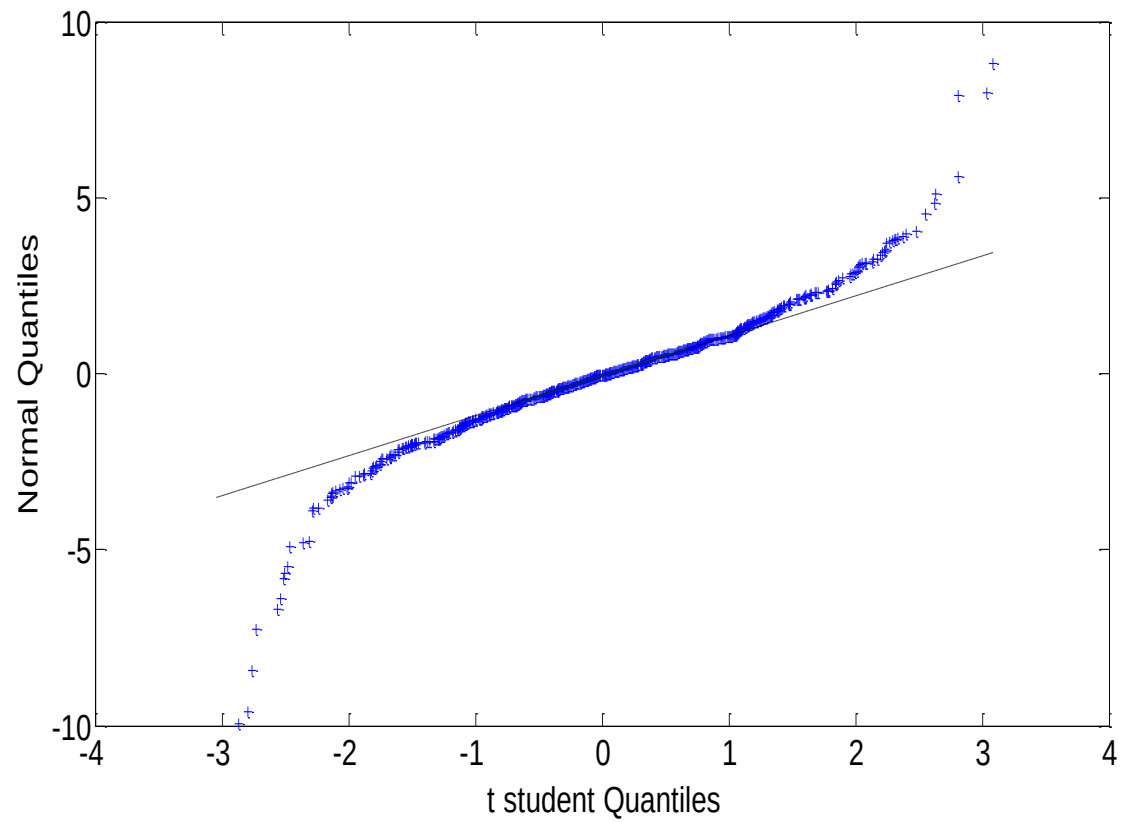
تابع میانگین فزونی

mean
excess
function

نمودار هیل

Hill plot

نمودار چندک-چندک

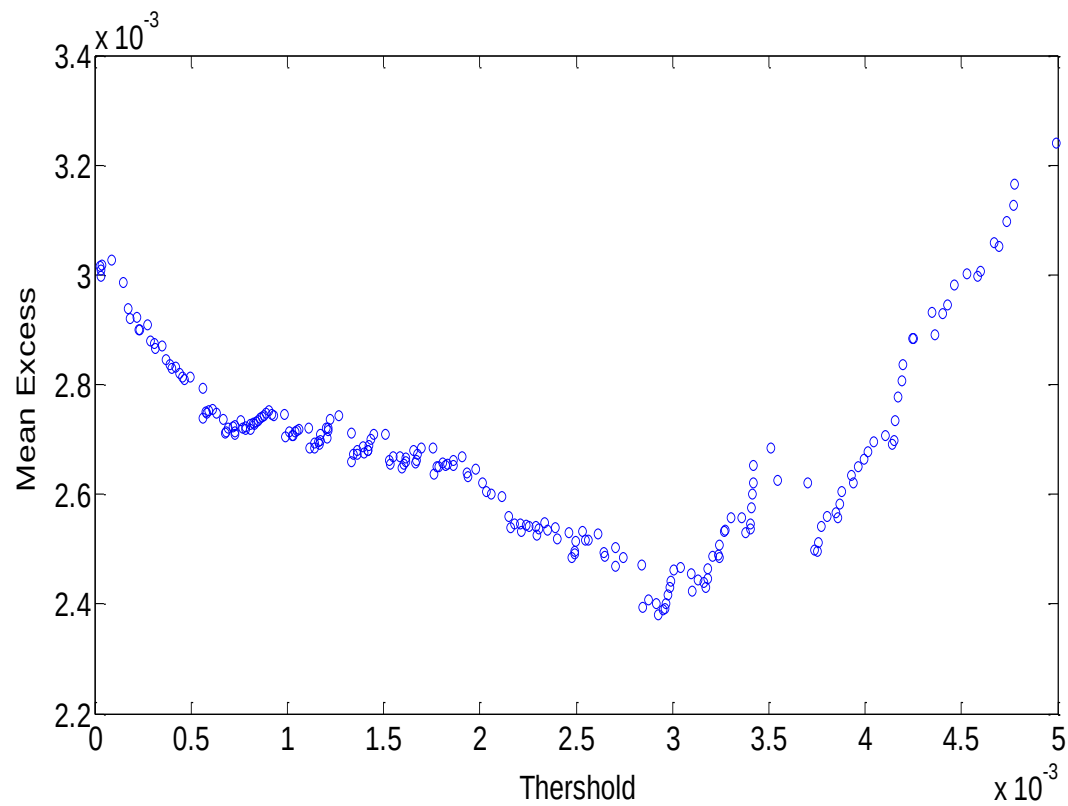


تابع میانگین فزونی

$$e_{n_u}(u) = \frac{\sum_{i=1}^{n_u} (X_i - u)}{\sum_{i=1}^{n_u} I_{(X_i > u)}}$$

اگر تابع میانگین فزونی در بالای یک آستانه خاص، خطی راست با شیب مثبت باشد، نشانگر این است که داده‌ها از توزیع تعمیم‌یافته پرتو با شاخص دنباله مثبت پیروی می‌کنند. از سوی دیگر، تابع میانگین فزونی داده‌هایی که دارای توزیع نمایی است، خطی افقی است و در نهایت این تابع برای داده‌هایی با دنباله‌های کم‌تراکم، خطی با شیب منفی است.

تابع میانگین فزونی



نمودار هیل

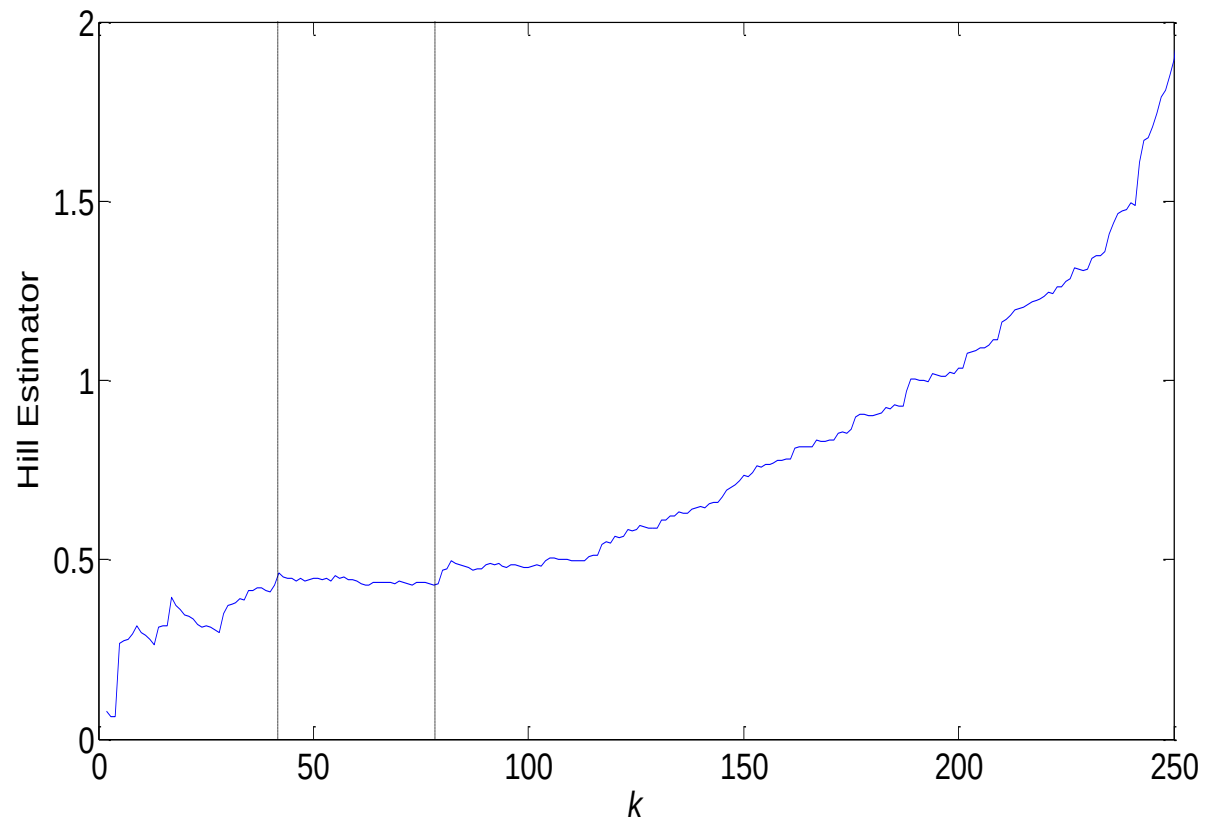
برای تعیین آستانه، نمودار هیل را ترسیم می کنیم، به گونه ای که شاخص دنباله تخمینی تابعی از تعداد k بالاترین آماره ترتیبی باشد. آستانه را در جایی انتخاب می کنیم که شاخص دنباله نسبتاً ثابت باشد. به عبارتی دیگر، آستانه را در جایی انتخاب می کنیم که تابع میانگین فزونی، برای مقادیر k نسبتاً افقی می شود.



$$\hat{\xi} = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \ln X_{i,n} - \ln X_{k,n} \quad \text{for } k \geq 2$$

که k شماره بالاترین آماره ترتیبی است و یا به عبارت دیگر تعداد تخطی ها می باشد و n اندازه نمونه است.

نمودار هیل



تخمین سایر پارامترها در رویکرد POT

پارامتر موقعیت یعنی $\mu_{\max}$ همان آستانه است و با انتخاب μ مشکل انتخاب این پارامتر مرتفع می گردد. برای انتخاب آستانه باید ترکیبی از ابزارهای مناسب مانند نمودار صدک- صدک، تابع میانگین فزونی و نمودار هیل را مد نظر قرار داد، در غیر این صورت ممکن است برآوردهایمان واریانس بالایی داشته و یا همراه با اریب باشد. در ادامه کار باید پارامترهای $\sigma_{\max}$ و $\xi_{\max}$ را برآورد کنیم. این پارامترها را می توان با استفاده از روش های ذیل تخمین زد:

روش حداکثر درست نمایی

روش رگرسیون

گام‌های روش حداکثر درست‌نمایی

۱. استخراج تابع
چگالی احتمال:

$$g_{\xi, \mu, \sigma}(G; x_{\max}) = \left(\frac{1}{\sigma_{\max}} \right) \left[1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right]^{-\left(\frac{1 + \xi_{\max}}{\xi_{\max}} \right)}$$

۲. استخراج تابع
احتمال و سپس
تابع لگاریتم احتمال

$$\ln L_h = \begin{cases} \text{if } \xi \neq 0 \\ -n_u \ln \sigma_{\max} - \left(\frac{1 + \xi_{\max}}{\xi_{\max}} \right) \sum_{i=1}^{n_u} \ln \left[1 + \xi_{\max} \left(\frac{x_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right] \\ \text{if } \xi = 0 \\ -n_u \ln \sigma_{\max} - \left(\frac{1}{\sigma_{\max}} \right) \sum_{i=1}^{n_u} (x_{\max} - \mu_{\max}) \end{cases}$$

گام‌های روش حداکثر درست‌نمایی

۳. برای تخمین پارامترها کافی است که تابع لگاریتم احتمال GPD را با توجه به محدودیت‌های زیر حداکثر نماییم:

$$X \in \begin{cases} [\mu_{\max}, \infty] & \text{if } \xi \geq 0 \\ \left[\mu_{\max}, \frac{\mu_{\max} - \sigma_{\max}}{\xi_{\max}} \right] & \text{if } \xi < 0 \end{cases}$$

گام‌های روش رگرسیون

۱. توالی ارزش‌های حداکثر را که با $X_{\max,1}, \dots, X_{\max,n_u-1}, X_{\max,n_u}$ نشان می‌دهیم از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم و به این ترتیب به آماره‌های ترتیبی ارزش‌های حداکثر یعنی دست می‌یابیم. این آماره‌ها شرط زیر را برآورده می‌سازد:

$$\hat{X}_{\max,n_u} \leq \hat{X}_{\max,n_u-1} \leq \dots \leq \hat{X}_{\max,1}$$

۲. میانگین فراوانی تجمعی « i » امین مقدار را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{n_u - i + 1}{n_u + 1}$$

که i ، شماره آماره است و آن را در محدوده ۱ تا n_u تعریف می‌کنیم.

گام‌های روش رگرسیون

۳. روش رگرسیون، تابع توزیع تجمعی این مشاهدات مرتب‌شده را برابر میانگین نظری آنها قرار می‌دهد:

$$E[G_{\max,n}(\hat{x}_{\max,i})] = \begin{cases} \text{if } \xi \neq 0 \\ E \left[1 - \left(1 + \xi_{\max} \left(\frac{\hat{x}_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right)^{-1/\xi_{\max}} \right] \\ = \frac{n_u + i - 1}{n_u + 1} \\ \\ \text{if } \xi = 0 \\ E \left[1 - \exp \left[- \left(\frac{\hat{x}_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right] \right] \\ = \frac{n_u + i - 1}{n_u + 1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_{\max,n}(\hat{x}_{\max,i}) \approx \frac{n_u + i - 1}{n_u + 1}$$

گام‌های روش رگرسیون

- ۴. از رابطه فوق، دو بار لگاریتم می‌گیریم تا به شکل ساده‌تری تبدیل شود، سپس جمله خطا را به سمت راست اضافه می‌کنیم تا به یک تساوی تبدیل گردد:

$$\begin{cases} 1 - \left(1 + \xi_{\max} \left(\frac{\hat{x}_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right)^{-1/\xi_{\max}} \approx \frac{n_u + i - 1}{n_u + 1} & \text{if } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\hat{x} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right] \approx \frac{n_u + i - 1}{n_e + 1} & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

- ۵. از رابطه فوق دو بار لگاریتم می‌گیریم تا به شکل ساده‌تری تبدیل شود. سپس جمله خطا را به سمت راست اضافه می‌کنیم تا رابطه به یک تساوی تبدیل گردد و در نهایت پارامترها را از طریق کمینه کردن مجموع مجذورات خطا با استفاده از معادلات

رگرسیون غیرخطی برآورد می‌کنیم.

$$\begin{cases} 1 - \left(1 + \xi_{\max} \left(\frac{\hat{x}_{\max} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right)^{-1/\xi_{\max}} \approx \frac{n_u + i - 1}{n_u + 1} & \text{if } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp \left[- \left(\frac{\hat{x} - \mu_{\max}}{\sigma_{\max}} \right) \right] \approx \frac{n_u + i - 1}{n_e + 1} & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

محاسبه ارزش در معرض ریسک

برای این که بتوانیم صدک‌های مربوط به توزیع تعمیم یافته پرتو را به صدک‌های توزیع مادر منتقل کنیم، باید به گونه‌ای بین احتمالات این دو توزیع رابطه برقرار نماییم. برای این کار از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$F_u(y) = \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)}$$

طبق قضیهٔ بالکما، دی‌هان و پیکاندس، $F_u(y)$ برای « u »هایی که به اندازهٔ کافی بزرگ است، به توزیع تعمیم یافتهٔ پرتو نزدیک می‌شود و نیز از آنجا که برای هر $X > u$ داریم: $X = u + y$ ، می‌توان نوشت:

$$F(x) = [1 - F(u)]G_{\xi, \mu, \sigma}(x - u) + F(u)$$

بعد از تعیین آستانه، مشاهدات فراتر از آستانه را از نمونهٔ مشاهدات جدا می‌کنیم. اگر تعداد مشاهدات فراتر از آستانه را با n_u و تعداد کل مشاهدات نمونه را با n نمایش دهیم. به راحتی می‌توانیم

آخرین جملهٔ سمت راست رابطه بالا را با برآورد کنندهٔ تجربی زیر تخمین بزنیم:

$$\hat{F}(u) = \frac{n - n_u}{n}$$

محاسبه ارزش در معرض ریسک

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه قبلی به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\hat{F}(x) &= \left(1 - \frac{n - n_u}{n}\right) G_{\xi, \mu, \sigma}(x - u) + \frac{n - n_u}{n} \\ &= \frac{n_u}{n} G_{\xi, \mu, \sigma}(x - u) + \frac{n - n_u}{n} = 1 + \frac{n_u}{n} [G_{\xi, \mu, \sigma}(x - u) - 1]\end{aligned}$$

در نهایت با جایگذاری تابع توزیع تجمعی تعمیم یافته پرتو در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{n_u}{n} \left(1 + \hat{\xi}_{\max} \frac{x - u}{\hat{\sigma}_{\max}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}_{\max}}}$$

می‌توانیم به جای $x - u$ ، معادل آن یعنی مقادیر اضافی فراتر از آستانه را جایگزین کنیم:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{n_u}{n} \left(1 + \hat{\xi}_{\max} \frac{y}{\hat{\sigma}_{\max}}\right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}_{\max}}}$$

محاسبه ارزش در معرض ریسک

برای یک احتمال معین مثل ، به راحتی می توان صدک مربوط به توزیع را برآورد نمود.
بدیهی است که این کار با معکوس کردن توزیع امکان پذیر است:

$$\hat{F}^{-1}(1-\alpha) = u + \frac{\hat{\sigma}_{\max}}{\hat{\xi}_{\max}} \left(\left(\frac{n}{n_u} \alpha \right)^{-\hat{\xi}_{\max}} - 1 \right)$$

این رابطه در صورتی صحیح است که شرط $1-\alpha > F(u)$ برآورده گردد:

اگر داده های مورد بررسی بازده دارایی باشد، رابطه بالا همان ارزش در معرض ریسک درصدی است. یعنی می توان نوشت:

$$\%VaR = u + \frac{\hat{\sigma}_{\max}}{\hat{\xi}_{\max}} \left(\left(\frac{n}{n_u} \alpha \right)^{-\hat{\xi}_{\max}} - 1 \right)$$

ریزش مورد انتظار درصدی نیز برابر است با:

$$\%ES = \frac{\%VaR}{1-\xi_{\max}} + \frac{\hat{\sigma}_{\max} - \hat{\xi}_{\max} u}{1-\xi_{\max}}$$

مثال: محاسبه ارزش در معرض ریسک

- فرض کنید برای بازده‌های روزانه یک سهم، آستانه‌ای معادل ۶٪ تعیین کرده‌ایم. قیمت روز این سهم ۱۰۰ تومان است و پارامترهای تخمینی، $\hat{\sigma}_{\max} = 0.05$ و $\hat{\xi}_{\max} = 0.5$ می‌باشد. اگر $n = 1000$ و $n_u = 50$ باشد، ارزش در معرض ریسک یک‌روزه در سطح اطمینان ۹۹٪ برابر است با:

$$\%VaR = q_{0.01}(r) = 0.06 + \frac{0.05}{0.5} \left[\left(\frac{1000 \times 0.01}{50} \right)^{-0.5} - 1 \right] = 0.184$$

$$VaR = 100 \times 0.184 = 18.4$$

- و ES نیز در همین سطح اطمینان برابر است با:

$$\%ES = \frac{0.184}{1-0.5} + \frac{0.05 - 0.5 \times 0.06}{1-0.5} = 0.408$$

$$ES = 100 \times 0.408 = 40.8$$



مباحث تکمیلی

- ✓ مقایسه دو رویکرد
- ✓ تکامل رویکردها
- ✓ محدودیت‌های EVT
- ✓ حسن ختام

GEVT در مقابل POT

هر دو رویکرد GEV و POT نسخه‌های مختلفی از یک نظریه زیربنایی به نام نظریه ارزش فرین است. رویکرد اول، پوشش دهنده توزیع ارزش‌های فرین است و رویکرد دوم، با توزیع تخطی‌های فراتر از یک آستانه بزرگ سروکار دارد. بنابراین به لحاظ نظری اختلاف زیادی بین آنها نیست، اما در عمل ممکن است بنا به دلایلی که ارایه می‌کنیم، یکی بر دیگری رجحان یابد:

در یک موقعیت خاص انتخاب یکی از رویکردها ممکن است از توجیه بیشتری برخوردار باشد. مثلاً، ممکن است با محدودیت داده مواجه باشیم و انتخاب یک رویکرد بر دیگری ترجیح داشته باشد. رویکرد GEV نسبت به POT دارای یک پارامتر اضافی است. هم‌چنین رویکرد GEV ممکن است باعث از دست رفتن بخشی از اطلاعات مفید گردد، چراکه ممکن است برخی از نمونه‌ها (بلوک‌ها) بیش از یک ارزش فرین داشته باشد. این دو مورد از معایب GEV نسبت به POT است. از طرف دیگر، POT مستلزم انتخاب یک آستانه است و این مسأله در GEV وجود ندارد.

GEVT در مقابل POT

هر دو رویکرد GEV و POT از مبانی نظری محکمی برخوردارند و به همین دلیل معقول و منطقی‌اند، ولی به هر حال باید رویکردی را انتخاب نمود که با مسأله پیش روی مناسب‌تری داشته باشد.

تکامل رویکردهای ارزش فرین

در صورت نقص مفروضات مقدماتی نظریه ارزش فرین،
ناچاریم نسخه‌های پیچیده‌تری از این نظریه را به کار گیریم:

- ارزش فرین شرطی
- ارزش فرین با داده‌های وابسته
- نظریه ارزش فرین چندمتغیره

محدودیت‌های EVT

کمبود داده‌ها

- نتیجه کمبود مشاهدات این است که برآوردهای ارزش فرین نسبت به صدک‌ها یا احتمالات مرکزی تر توزیع بسیار نامطمئن است و متعاقباً دارای فواصل اطمینان نسبتاً پهنی خواهند بود.

ریسک مدل

- ما باید جهت ارایه تخمین‌هایی از ارزش‌های فرین مفروضات مختلفی را در نظر بگیریم و این در حالی است که در عمل، تأیید صحت این مفروضات مشکل است.

اثرات نامطلوب نمونه کوچک

- نظریه ارزش فرین مجانباً خوب عمل می‌کند، در نتیجه تخمین‌ها نسبت به اثرات نمونه کوچک یعنی اریب‌ها، غیرخطی بودن و دیگر مسائل نامطلوب بسیار حساس است. .

حسن ختام: نقل قول از صاحب نظران

مک نیل که در این زمینه پیشتاز است، می گوید:

- ما با دنباله ها کار می کنیم و این در حالی است که تنها تعداد محدودی داده در اختیار داریم. عدم اطمینان تحلیل هایمان اغلب بالاست و این موضوع در فواصل اطمینان پهن ظاهر می شود. ... به هر حال اگر به دنبال کمی سازی حوادث نادر هستیم، می توانیم به جای استفاده از رویکردهای فاقد عمومیت، بهترین استفاده را از *EVT* به عمل بیاوریم. نظریه ارزش فرین بهترین تخمین را از رویدادهای فرین به دست می دهد. این نظریه نماینده درست ترین رویکردها برای اندازه گیری عدم اطمینان موجود در رویدادهای فرین است.

حسن ختام: نقل قول از صاحب نظران

دیپولد و همکارانش در مقاله‌ای که در سال ۲۰۰۰ انتشار یافت، می‌نویسند:

- بهترین استفاده از *EVT* در مدیریت ریسک مالی زمانی حاصل می‌شود که علاوه بر نقاط قوت از محدودیت‌های آن نیز آگاه باشیم. با روشن شدن ابهامات، *EVT* به نظریه‌ای مفید و اساسی بدل خواهد شد. *EVT* به ما در جهت رسم منحنی‌های هموار از میان دنباله‌های فرین توابع تجربی کمک می‌کند. ... ولی نباید از آن بیشتر از آنچه که هست، انتظار داشته باشیم.

بَا تَشْكُر