

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

ریاضیات مالی: عرصه‌ی کاربرد دانش ریاضیات در

حوزه‌ی مالی

حسین عبده تبریزی

میثم رادپور

سومین همایش ریاضیات و علوم انسانی
سوم و چهارم اردیبهشت ماه سال ۹۳، دانشکده‌های اقتصاد و علوم ریاضی دانشگاه علامه‌ی طباطبایی

دانش مالی

✓ جایگاه

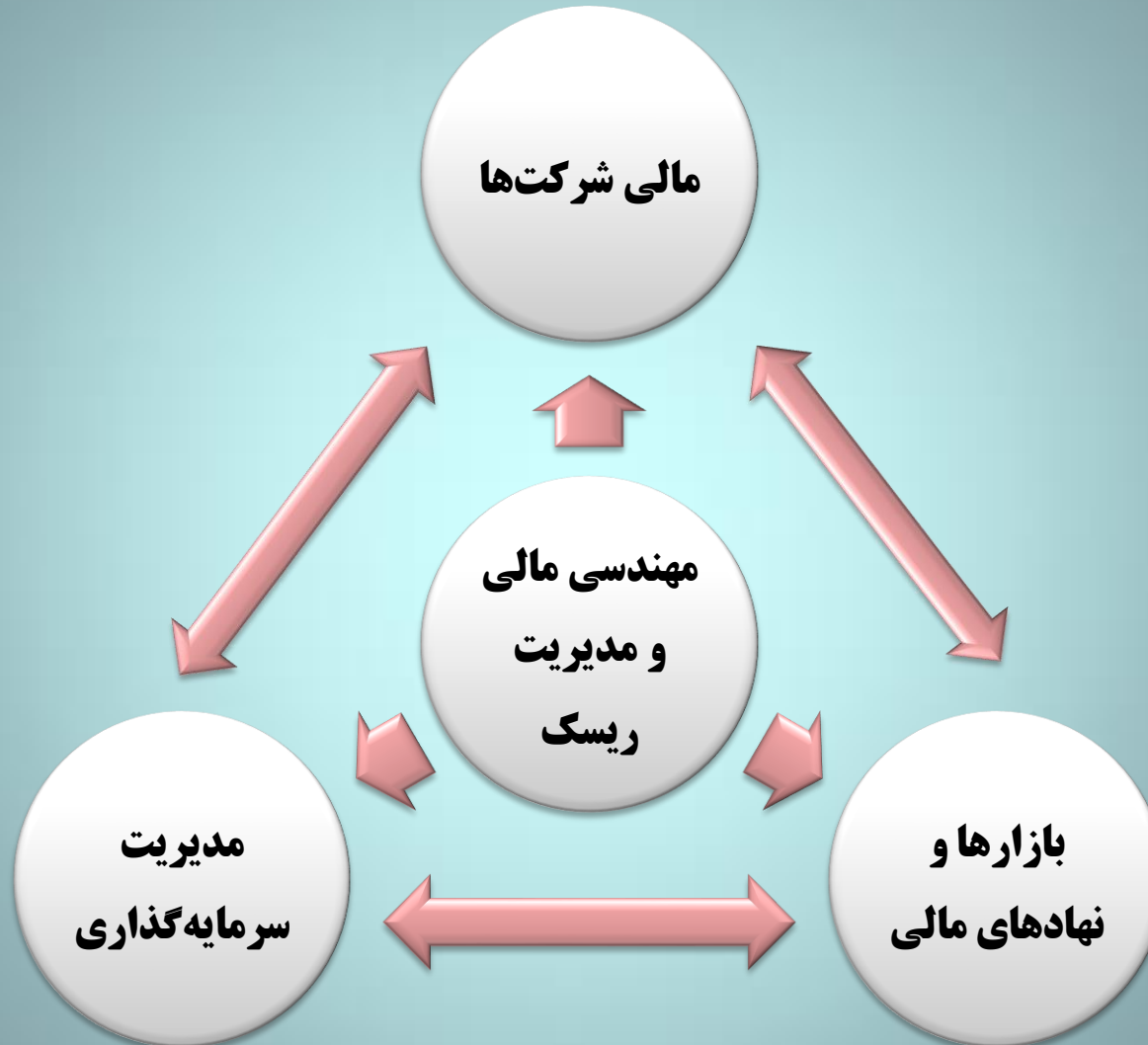
✓ حوزه‌های عمده

✓ حوزه‌های مرتبط

جایگاه دانش مالی



حوزه‌های عمده‌ی مالی



ریاضیات مالی

تعریف

- ریاضیات مالی که با نام مالی کمی نیز شناخته می شود، شاخه ای از ریاضیات کاربردی است که با بازارهای مالی سروکار دارد. به طور کلی ریاضیات مالی ایجاد و توسعه ی مدل های ریاضی یا عددی را شامل می شود؛ مدل هایی که لزوماً با نظریه ی مالی ارتباط برقرار نمی کنند.

ریاضیات مالی در مقایسه با اقتصاد مالی

ریاضیات مالی

- بر منطق ریاضی مدل‌ها تأکید می‌شود، نه سازگاری آن‌ها با نظریه‌های اقتصادی. به عنوان مثال در ریاضیات مالی قیمت سهام مفروض گرفته می‌شود و سعی می‌شود با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی قیمت اوراق مشتقه استخراج شود.

اقتصاد مالی

- بر سازگاری مدل‌های ریاضی با نظریه‌های اقتصادی تأکید می‌شود. به عنوان مثال اقتصاد مالی دلایل ساختاری قیمت در بازار سهام را جستجو می‌کند.

حوزه‌های مرتبط (I)

مالی محاسباتی

computational
finance

مهندسی مالی

financial
engineering

حوزه‌های مرتبط (II)

مالی محاسباتی

- شاخه‌ای از علوم رایانه‌ای است که با مسائل کاربردی مطرح در مالی سروکار دارد. مالی محاسباتی به مطالعه‌ی داده‌ها و الگوریتم‌های مورد استفاده در دانش مالی و نیز ریاضیات برنامه‌های کامپیوتری مورد استفاده در مدل‌ها و سیستم‌های مالی می‌پردازد.
- مالی محاسباتی به جای اثبات ریاضی مدل‌های مالی بر روش‌های عددی کاربردی تأکید دارد و نیز بر تکنیک‌هایی متمرکز است که مستقیماً در تحلیل‌های اقتصادی استفاده می‌شود. مالی محاسباتی حوزه‌ای بین‌رشته‌ای است که از تلفیق ریاضیات مالی و روش‌های عددی ایجاد می‌شود. دو موضوع اصلی مالی محاسباتی عبارت است از: محاسبه‌ی قیمت اوراق بهادار و مدلسازی سری‌های تصادفی قیمت

حوزه‌های مرتبط (III)

مهندسی مالی

حوزه‌ای بین‌رشته‌ای است که نظریه‌ی مالی، روش‌های مهندسی، ابزار ریاضی و برنامه‌نویسی را شامل می‌شود. مهندسی مالی کاربرد روش‌های فنی در مالی است، خصوصاً آن روش‌هایی که از ریاضیات مالی و مالی محاسباتی به عاریت گرفته شده‌اند. در واقع ریاضیات مالی و مالی محاسباتی از زیرشاخه‌های مهندسی مالی‌اند. مهندسی مالی با استفاده از ابزار ریاضیات و رایانه، ابزارها و فرآیندهای نوین مالی را به منظور حل مسائل منحصر به فرد مالی ایجاد می‌کند.

ریاضیات مالی

✓ قیمت گذاری اختیار معامله

نیاز به ریاضیات پیشرفته

دو سرفصل مالی که تکنیک‌های پیشرفته‌ی کمی را می‌طلبد:

قیمت‌گذاری اوراق مشتقه

ریسک و مدیریت سبد
اوراق بهادار

یک بازی ساده (I)

فرض کنید می‌توانید هر چند بار که علاقه دارید با پرداخت A ریال در بازی‌ای به شرح ذیل شرکت کنید:

- سکه‌ای سالم به هوا پرتاب می‌شود، اگر شیر بیاید، مبلغ ده میلیون ریال نصیبتان می‌شود و اگر خط ظاهر شود، ده میلیون ریال از شما اخذ می‌شود.
- حداکثر (حداقل) مبلغی که حاضرید برای شرکت در بازی بپردازید (اخذ کنید)، چقدر است؟ اگر قیمت بازی را درست محاسبه نکنید چه اتفاقی می‌افتد؟

یک بازی ساده (II)

فرض کنید می‌توانید هر چند بار که علاقه دارید در بازی‌ای به شرح ذیل شرکت کنید:

- قیمت سکه‌ی بهار آزادی در حال حاضر ده میلیون ریال (S) است. شخص معتبری تعهد می‌کند سکه‌ی بهار آزادی را برای یک سال آینده از شما بخرد.
- F حداقل چقدر باید باشد تا وارد این بازی شوید؟ اگر قیمت بازی را درست محاسبه نکنید چه اتفاقی می‌افتد؟

یک بازی ساده (III)

فرض کنید می‌توانید هر چند بار که علاقه دارید با پرداخت A ریال در بازی‌ای به شرح ذیل شرکت کنید:

- سکه‌ای سالم به هوا پرتاب می‌شود، اگر شیر بیاید، مبلغ ده میلیون ریال نصیبتان می‌شود و اگر خط ظاهر شود، چیزی از شما اخذ نمی‌شود.
- حداکثر مبلغی که حاضرید برای شرکت در بازی بپردازید، چقدر است؟ اگر قیمت بازی را درست محاسبه نکید چه اتفاقی می‌افتد؟

یک بازی پیچیده

فرض کنید می‌توانید هرچند بار که علاقه دارید با پرداخت C ریال در بازی‌ای به شرح ذیل شرکت کنید:

- قیمت سکه‌ی بهار آزادی در حال حاضر ده میلیون ریال است. شخص معتبری تعهد می‌کند در صورتی که قیمت سکه‌ی بهار آزادی برای پایان سال ۹۳ بیش از قیمت جاری باشد، مابه‌التفاوت قیمت آتی (F) و جاری (k) را به شما پرداخت نماید و در غیر این صورت پرداختی نخواهد داشت.
- حداکثر مبلغی که حاضرید برای شرکت در بازی بپردازید، چقدر است؟ اگر قیمت بازی را درست محاسبه نکنید چه اتفاقی می‌افتد؟

Myron S. Sholes & Robert C. Merton (1973)



مدل قیمت گذاری اختیار معامله (۱۹۷۳)



$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r_f + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$C = SN(d_1) - Ke^{-rt}N(d_1 - \sigma\sqrt{t})$$

✓ برای ارائه روش های جدید در تعیین قیمت اوراق مشتقه

بازی‌های پیچیده‌تر

سوآپ نرخ بهره

- Interest rate swap

اوراق بهادار با پشتوانه‌ی رهن

- mortgage backed securities

تعهدات رهنی وثیقه‌دار

- collateralized mortgage obligations

اختیار معامله روی قرارداد آتی

- option on futures

اصل اساسی قیمت‌گذاری اوراق مشتقه

ریاضی‌دانان مالی به شکل وسیعی از اصل عدم وجود آربیتراژ استفاده می‌کنند:

ناهار مجانی وجود ندارد.

تاریخچه‌ی ریاضیات مالی

حرکت برآونی

در سال ۱۹۰۰ لوئیس باچلییر با معرفی فرآیند تصادفی حرکت برآونی اولین سنگ بنای ریاضیات مالی را بنیان نهاد.



انتگرال تصادفی

در سال ۱۹۶۵ پل ساموئلسون ضمن معرفی حرکت براونی هندسی، انتگرال تصادفی را وارد حوزه‌ی مالی کرد.



فرآیندهای پیوسته‌ی تصادفی

در سال ۱۹۶۹ رابرت مرتون انتگرال پیوسته‌ی تصادفی و فرآیندهای تصادفی پیوسته‌ی زمانی را به حوزه‌ی مالی عرضه داشت.



مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله

در سال ۱۹۷۳ فیشر بلک و مایرون شولز مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله را به جامعه‌ی مالی تقدیم کردند.

ریاضیات مالی

✓ریسک و مدیریت سبد اوراق بهادار

ریسک و مدیریت سبد اوراق بهادار

نظریه‌ی انتخاب سبد اوراق بهادار

- اولین بار هری مارکوویتز در سال ۱۹۵۲ نشان داد سرمایه‌گذاران به جای انتخاب تک‌تک اوراق بهادار، سبد اوراق بهادار را انتخاب می‌کنند. وی نشان داد که چگونه سرمایه‌گذاران در تلاشند بازدهی سبد را در سطح معینی از بازده موردانتظار کمینه کنند.

Harry M. Markowitz (1990)

مدل میانگین- واریانس (۱۹۵۲)



$$\hat{r}_P = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n] \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \vdots \\ \hat{r}_n \end{bmatrix}$$

$$\sigma_P = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n] \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

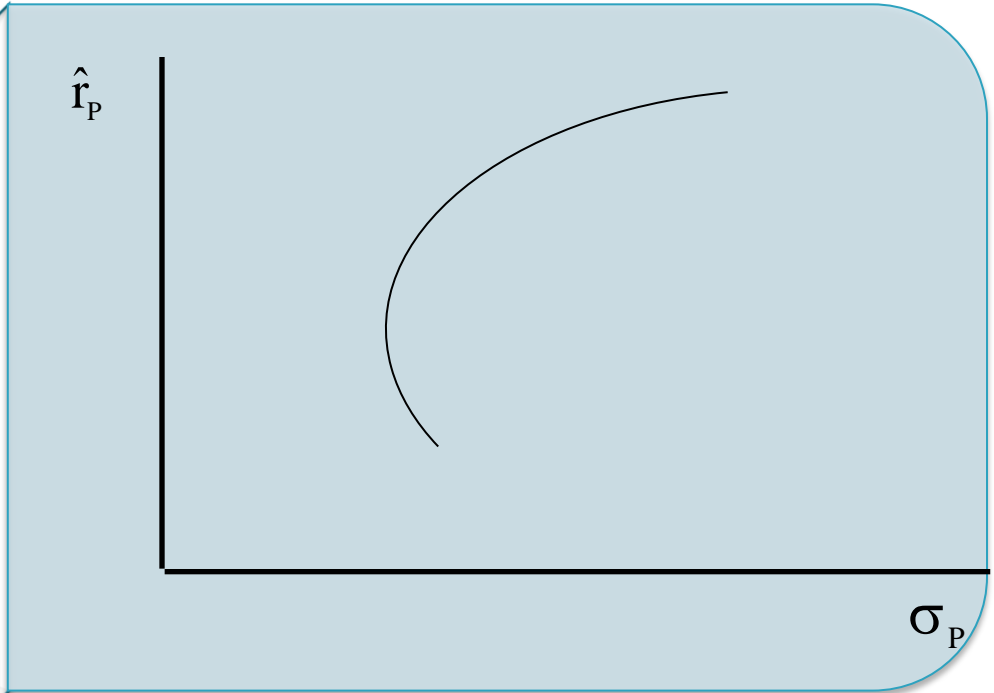
✓ برای پیشگام بودن در زمینه نظریه اقتصاد مالی

مرز کارا

$$\text{Min } z = \sigma_p^2$$

$$\text{S.T: } \hat{r}_p = \sum_{i=1}^n w_i \hat{r}_i$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$



مسیر ریاضی دانان مالی

هم اکنون ریاضی دانان مالی به دنبال مدل‌های پیشرفته‌ی بهینه‌سازی سبد اوراق بهادارند. مدل‌هایی که پویایی‌های بازده و ریسک را لحاظ می‌کنند، و در نتیجه انتظار می‌رود نسبت به مدل‌های سنتی ترکیب‌های بهینه‌تری از اوراق بهادار را پیشنهاد دهند.

با تشکر