بسم الله الرحمن الرحيم

مدل‌سازی ریسک از منظر ریسک بازار

توسعهٔ مدل‌ها، برآورد پارامترها

حسین عبده تبریزی
میثم رادپور

ویراست دوم: آذرماه ۱۳۹۰

اول بار ارائه در دورهٔ مدل‌سازی و مدیریت ریسک مرکز مطالعات تکنولوژیک دانشگاه صنعتی شریف

ریسک

یادآوری مفاهیم مدل‌سازی

مؤلفه‌های ریسک: ریسک بازار

- عدم‌اطمینان
  - Uncertainty
- در معرض بودن
  - Exposure

پویایی‌های توزیع

توزیع شرطی
Conditional distribution

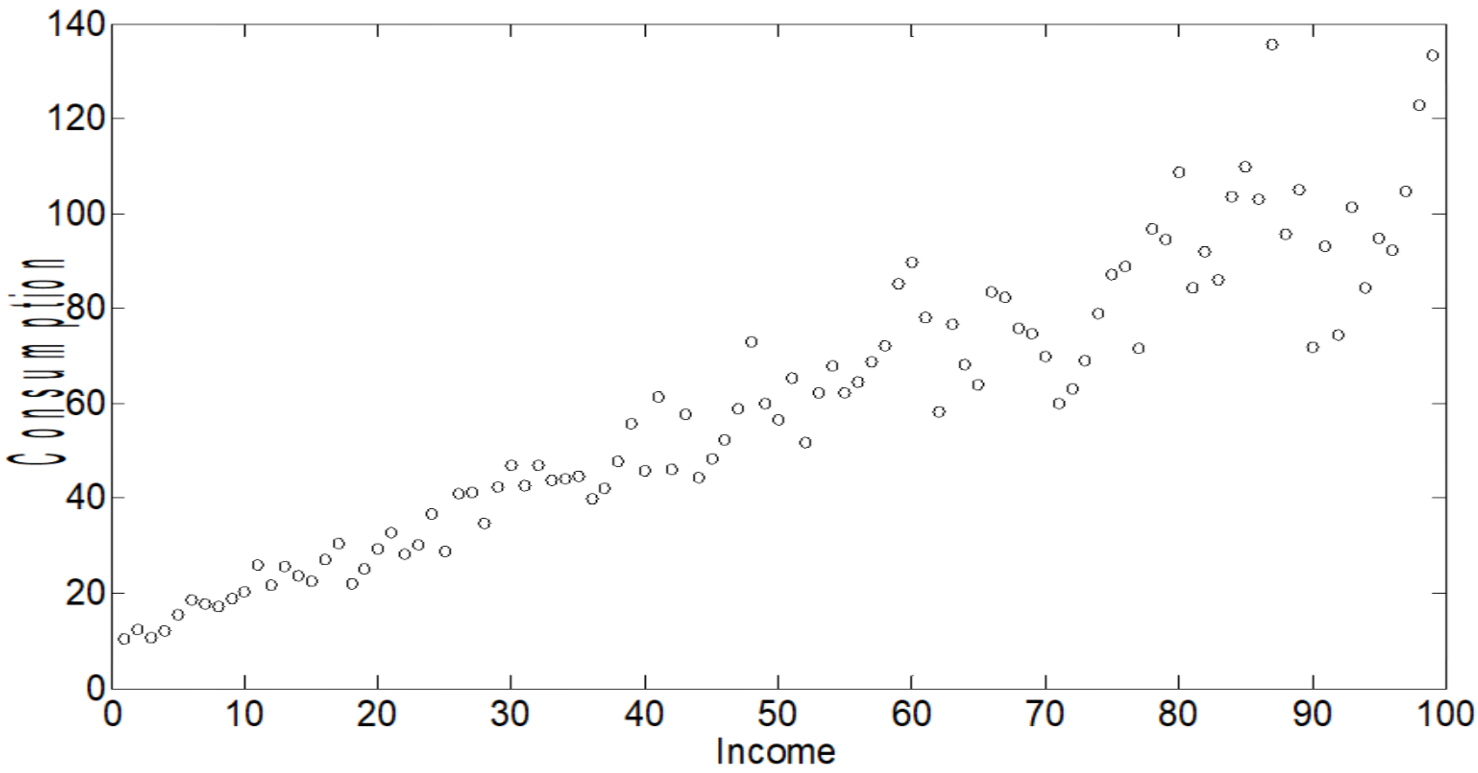
توزیع غیرشرطی
Unconditional distribution

توزیع سری بازدهٔ مالی

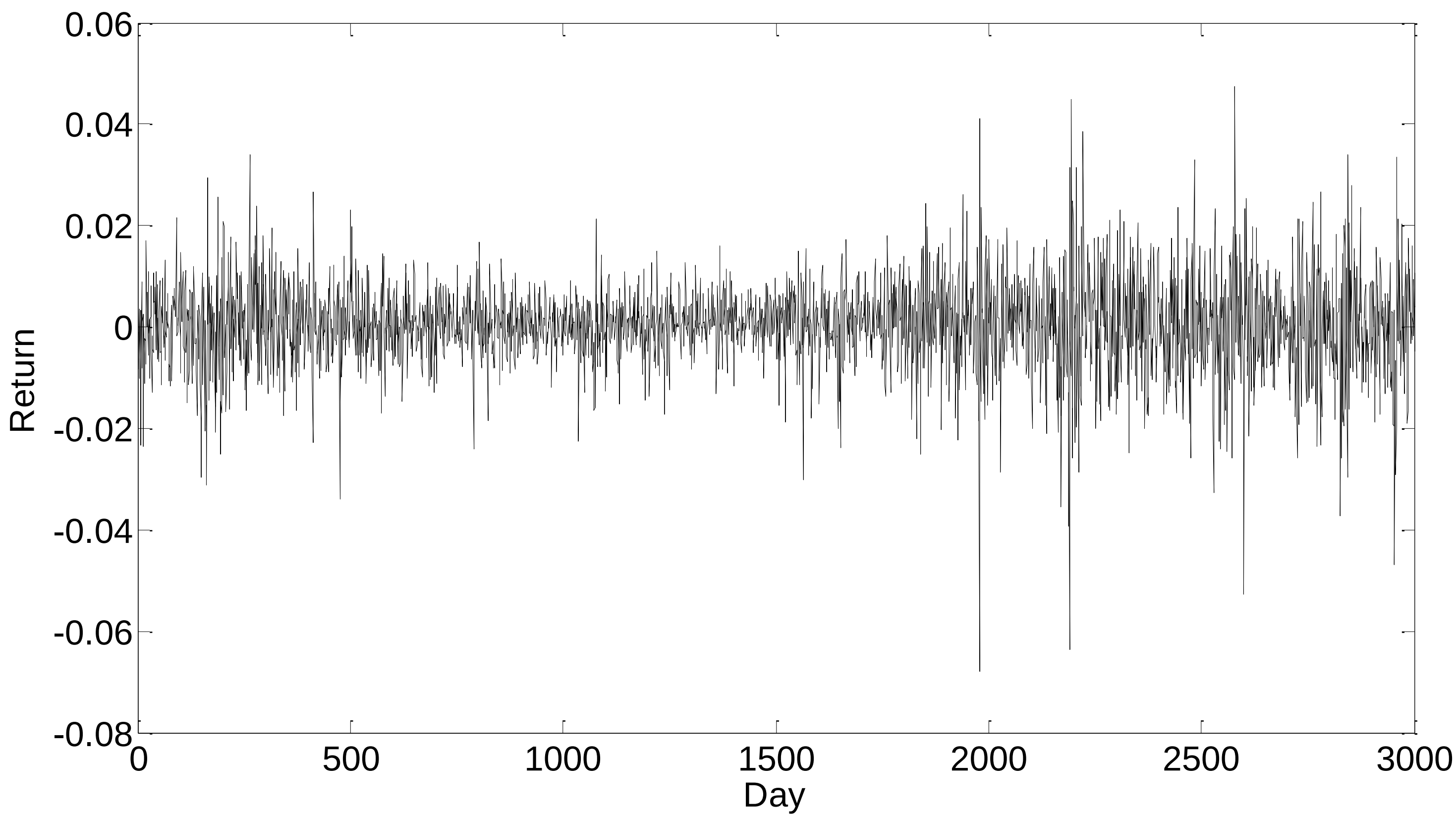
نتایج تحقیقات نشان می‌دهد:

- توزیع سری بازدهٔ مالی نرمال غیرشرطی (Unconditionally Normal) نیست ولی، فرض توزیع نرمال شرطی (Conditionally Normal) برای سری یادشده کاملاً پذیرفتنی است.

ناهمسانی واریانس (Heteroscedasticity)-تابع مصرف



خوشه‌بندی تلاطم (Volatility Cluster) برای سری TEPDIX

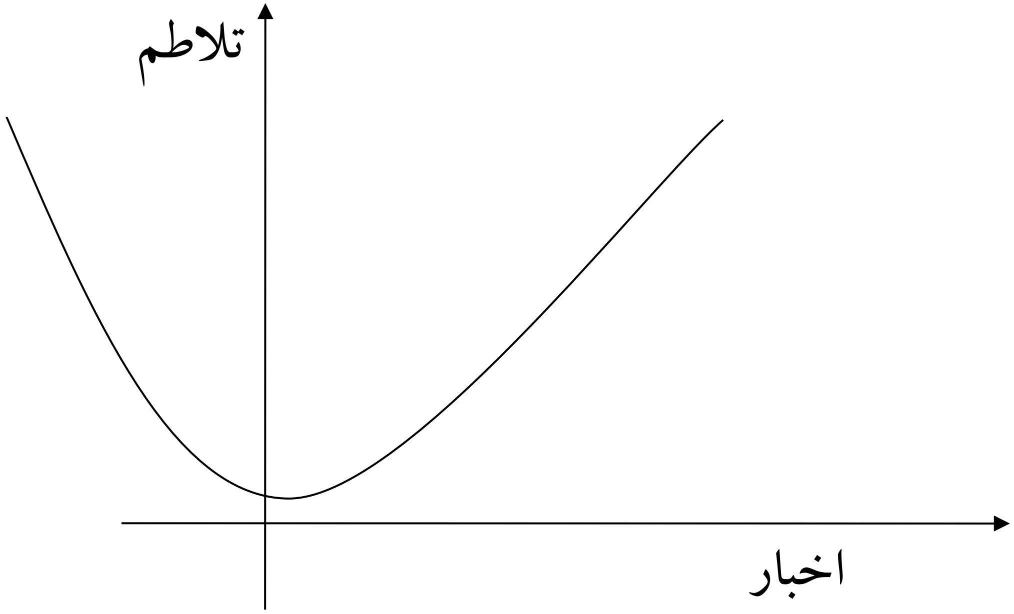


خوشه‌بندی تلاطم و بازده

مطالعات در مورد سری بازدهٔ مالی:

- مطالعات، همبستگی تلاطم‌های بازدهٔ مالی و به اصطلاح تشکیل خوشهٔ تلاطم را به اثبات رسانده است و این در حالی است که وجود همبستگی‌های بازده خصوصاً در بازارهایی که از کارایی نسبی برخوردارند، کمتر به‌چشم می‌خورد.

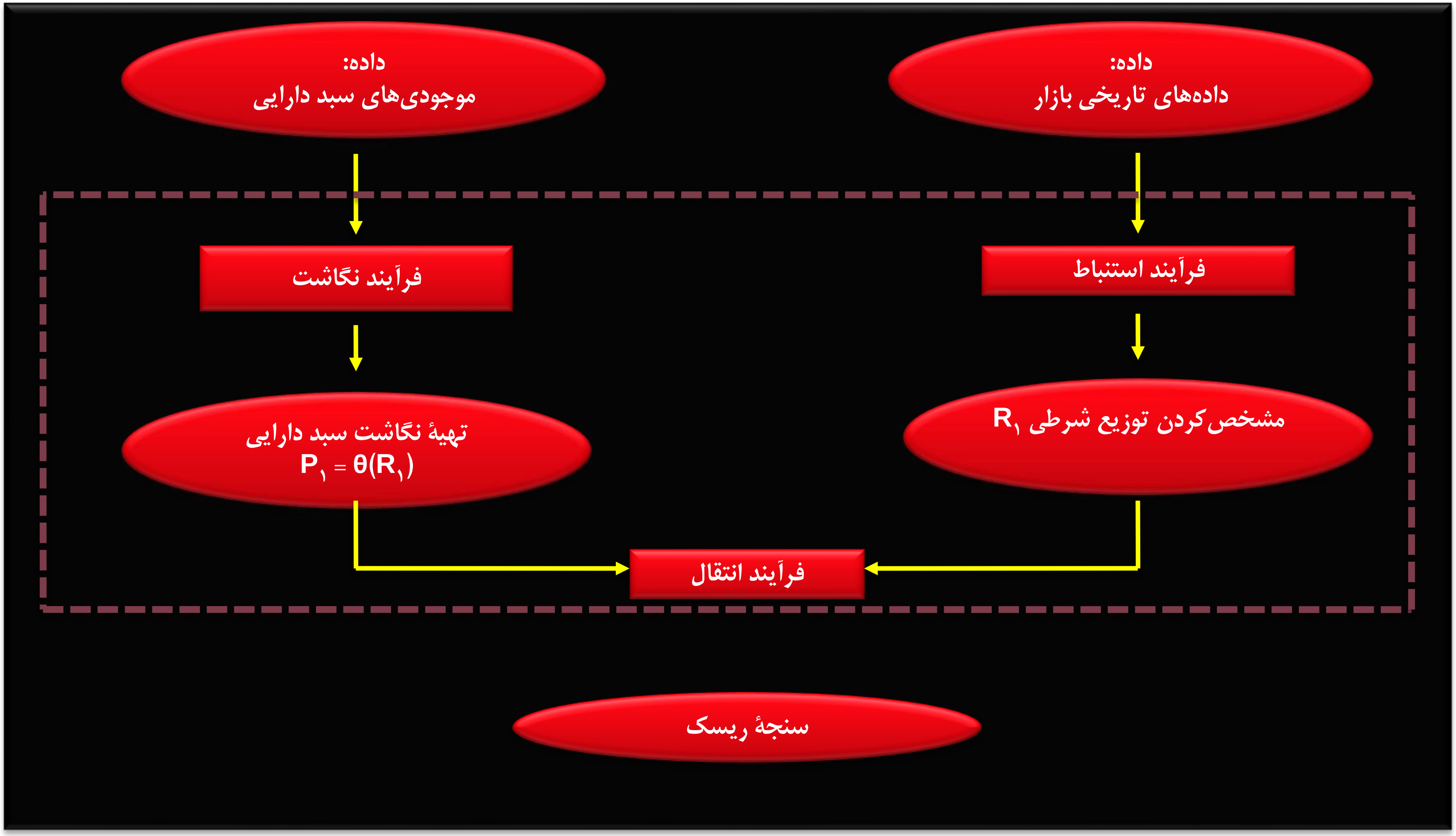
عدم تقارن اثر اخبار خوب و بد در تلاطم



مدل‌سازی ریسک

فرآیندها

فرآیند مدل‌سازی ریسک



گام اول-مرحلهٔ اول

موجودی‌های پرتفوی (Portfolio Holdings)

- شامل تعداد واحدهای هر کدام از دارایی‌های موجود در سبد دارایی است.
- مثال

$$\omega = \begin{pmatrix} 100 & 50 \end{pmatrix}$$

گام اول-مرحلهٔ دوم

شناسایی عوامل ریسک

- عامل ریسک، متغیری تصادفی است که طی فاصلهٔ زمانی [0,1] مقداری به‌خود می‌گیرد و ارزش بازار سبد دارایی را در زمان ۱ متأثر می‌سازد. بردار ریسک که با Q_1 نمایش می‌دهیم، برداری تصادفی از عوامل ریسک در زمان ۱ است.
- P_1: ارزش آتی سبد دارایی (عامل ریسک)
- S_1: بردار دارایی (بردار ریسک)
- R_1: بردار کلیدی (بردار ریسک)

گام دوم-مرحلهٔ اول

فرآیند نگاشت (Mapping)

- در ریاضیات، نگاشت مترادف تابع است. در ادبیات ریسک، منظور از نگاشت، توابعی است که بردارهای خاص ریسک را به یکدیگر ارتباط می‌دهد.
- مثال:

$$\mathbf{Q}_1 = \varphi(\dot{\mathbf{Q}}_1)$$

- نگاشت پرتفوی آن نگاشتی است که ارزش یک سبد دارایی را به‌صورت تابعی از یک بردار ریسک مثل Q_1 تعریف می‌کند. از این پس این بردار را بردار کلیدی ریسک می‌گوییم و آن‌را با R_1 نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{P}_1 = \theta(\mathbf{R}_1)$$

گام دوم-مرحلهٔ دوم

فرآینـــــــــد استـــــــــنباط (Inference)

- هدف از فرآیند استنباط، مشخص‌نمودن توزیع بردار عوامل کلیدی ریسک مشروط بر اطلاعات موجود در زمان صفر است. به‌بیانی دیگر طی رویهٔ استنباط، یک توزیع شرطی برای R_1 مشخص می‌کنیم.

گام سوم

فرآیند انتقال (Transformation)

- در فرآیند انتقال باید به‌نوعی اطلاعات بازار موجود در ویژگی‌های توزیع R_1 را از طریق اطلاعات موجود در نگاشت سبد دارایی پالایش کنیم. به بیانی ساده‌تر، با طی این فرآیند، توزیع شرطی P_1 را مشخص می‌کنیم.

مدل‌سازی ریسک

مدل مارکویتز، مدل تک‌عاملی

مدل مارکویتز-گام اول

Portfolio Holdings

$$\mathbf{W} = (w_A \; w_B)$$

Risk Factors

$$\mathbf{r}_1 \;\&\; \begin{pmatrix} r_A \\ r_B \end{pmatrix}$$

مدل مارکویتز-گام دوم

Mapping

$$\mathbf{r}_1 = (w_A \; w_B)\begin{pmatrix} r_A \\ r_B \end{pmatrix}$$

Inference

$$r_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2) \qquad r_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$$

$$\begin{pmatrix} \mu_A \\ \mu_B \end{pmatrix} \& \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{A,B} \\ \sigma_{B,A} & \sigma_B^2 \end{bmatrix}$$

مدل مارکویتز-گام سوم (فرآیند انتقال)

Mean

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} w_A & w_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_A \\ \mu_B \end{pmatrix}$$

Variance

$$b = \begin{pmatrix} w_A \\ w_B \end{pmatrix} \& \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{A,B} \\ \sigma_{B,A} & \sigma_B^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_1 = b' \sum b$$

مدل تک‌عاملی-گام اول

Portfolio Holdings

$$\mathbf{W} = \left(w_A \; w_B \right)$$

Risk Factors

$$\mathbf{r}^{I} \,\&\, \begin{pmatrix} \lambda^{B} \\ \lambda^{A} \end{pmatrix} \,\&\, \mathbf{I}$$

مدل تک‌عاملی-گام دوم

Mapping

$$\mathbf{r}_1 = (w_A\ w_B)\begin{pmatrix} r_A \\ r_B \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} r_A \\ r_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_A + \beta_A I + \varepsilon_A \\ \alpha_B + \beta_B I + \varepsilon_B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_1 = (w_A\ w_B)\begin{pmatrix} \alpha_A + \beta_A I + \varepsilon_A \\ \alpha_B + \beta_B I + \varepsilon_B \end{pmatrix}$$

Inference

$$I \sim N(\bar{I}, \sigma_I^2)$$

مدل مدل تک‌عاملی-گام سوم

Mean

$$\varepsilon \sim N(0,\sigma_{\varepsilon}^{2})$$

$$\mu_1 = (w_A \; w_B)\begin{pmatrix} \alpha_A + \beta_A \bar{I} \\ \alpha_B + \beta_B \bar{I} \end{pmatrix}$$

Variance

$$Cov(I,\varepsilon)=0 \quad Cov(\varepsilon_A,\varepsilon_B)=0$$

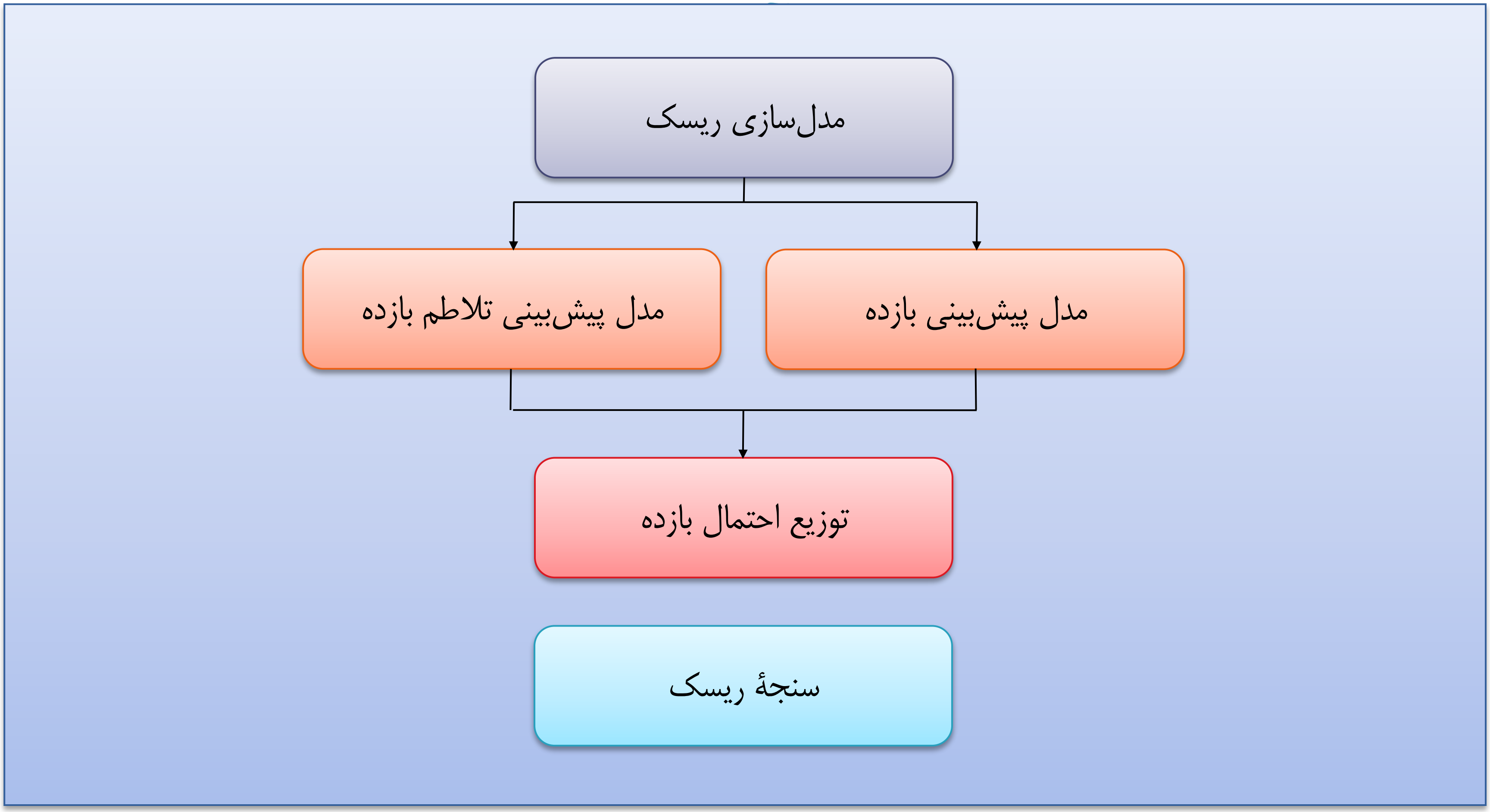
$$b=\begin{pmatrix} w_A\beta_A + w_B\beta_B \\ w_A \\ w_B \end{pmatrix} \& \Sigma=\begin{bmatrix} \sigma_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = b'\Sigma b$$

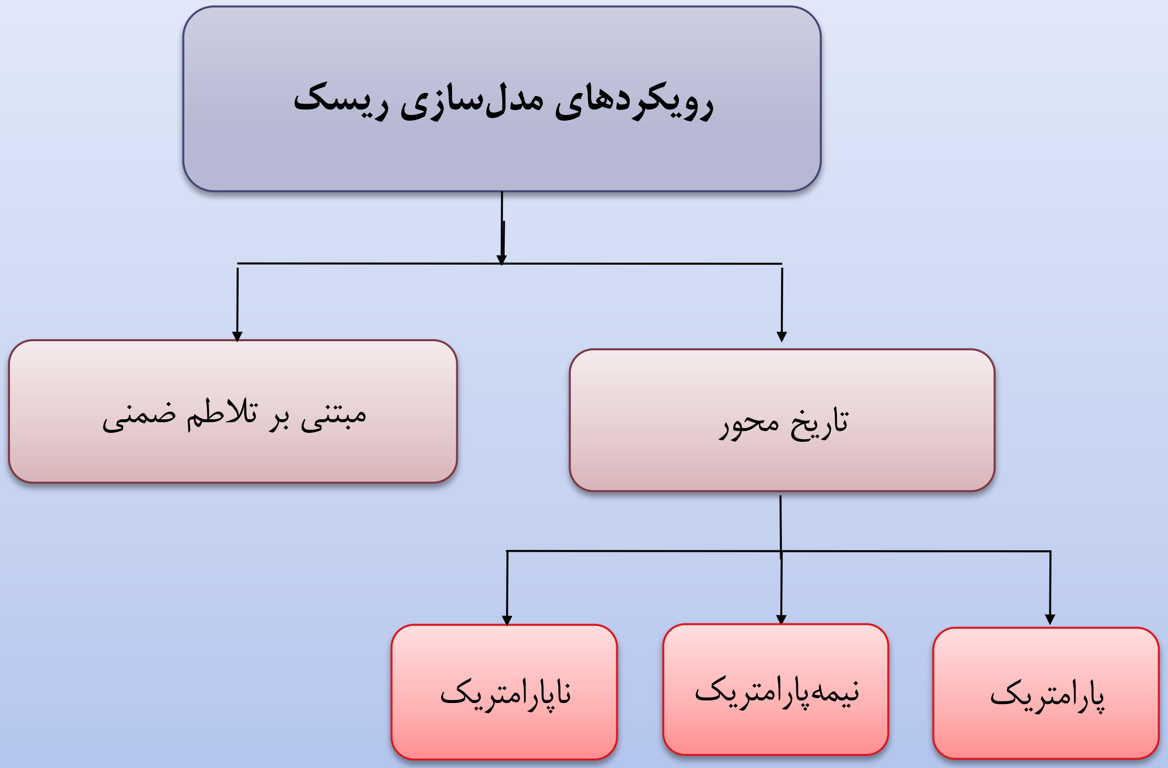
مدل‌سازی ریسک

ساده‌سازی‌های فرآیند - مدل‌های استاندارد

فرآیند ساده‌شدهٔ مدل‌سازی ریسک



رویکردهای مدل‌سازی ریسک



رویکردهای پارامتریک

دسته‌بندی بر اساس آمار مورداستفاده	
مبتنی بر آمار ارزش فرین	مبتنی بر آمار گرایش مرکزی

رویکردهای پارامتریک

مبتنی بر آمار گرایش مرکزی

مدل‌های پیش‌بینی بازده

مدل‌های تک شاخصی

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i I_t + \varepsilon_{it}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

مدل‌های گشت تصادفی

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

مدل‌های میانگین متحرک

$$MA(M) \qquad r_t = C + \sum_{j=1}^{M} \phi_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

مدل‌های خودرگرسیونی

$$AR(R) \qquad r_t = C + \sum_{i=1}^{R} \theta_i r_{t-i} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

مدل‌های خودرگرسیونی میانگین متحرک

$$ARMA(R,M) \qquad r_t = C + \sum_{i=1}^{R} \theta_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^{M} \phi_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,\sigma^2)$$

مدل‌های ARMA-برآورد پارامترها

باقیمانده‌های استاندارد شده

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma} = \frac{r_t - (\omega + \alpha_1 r_{t-1} - \beta_1 \varepsilon_{t-1})}{\sigma}$$

چگالی احتمال مشترک

$$\max L = \max \prod_{t=1}^{T} \varphi_t\left(z_t \middle| \mu_t, \sigma\right) = \max \prod_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-z_t^2}{2} \right) \right)$$

مدل‌های پیش‌بینی تلاطم

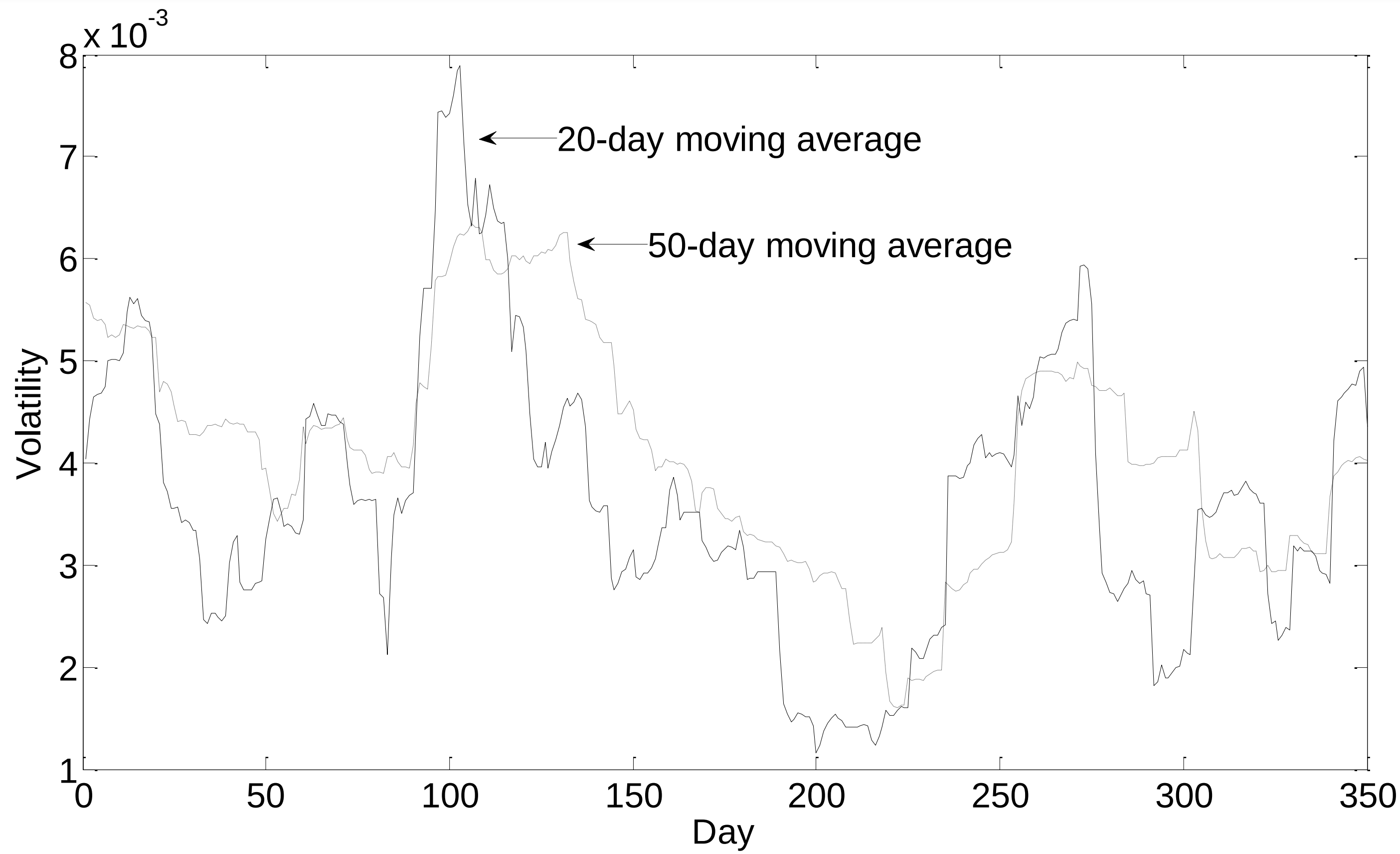
- میانگین متحرک ساده
- میانگین متحرک با اوزان نمایی
- مدل‌های تلاطم تصادفی

میانگین متحرک ساده و نمایی

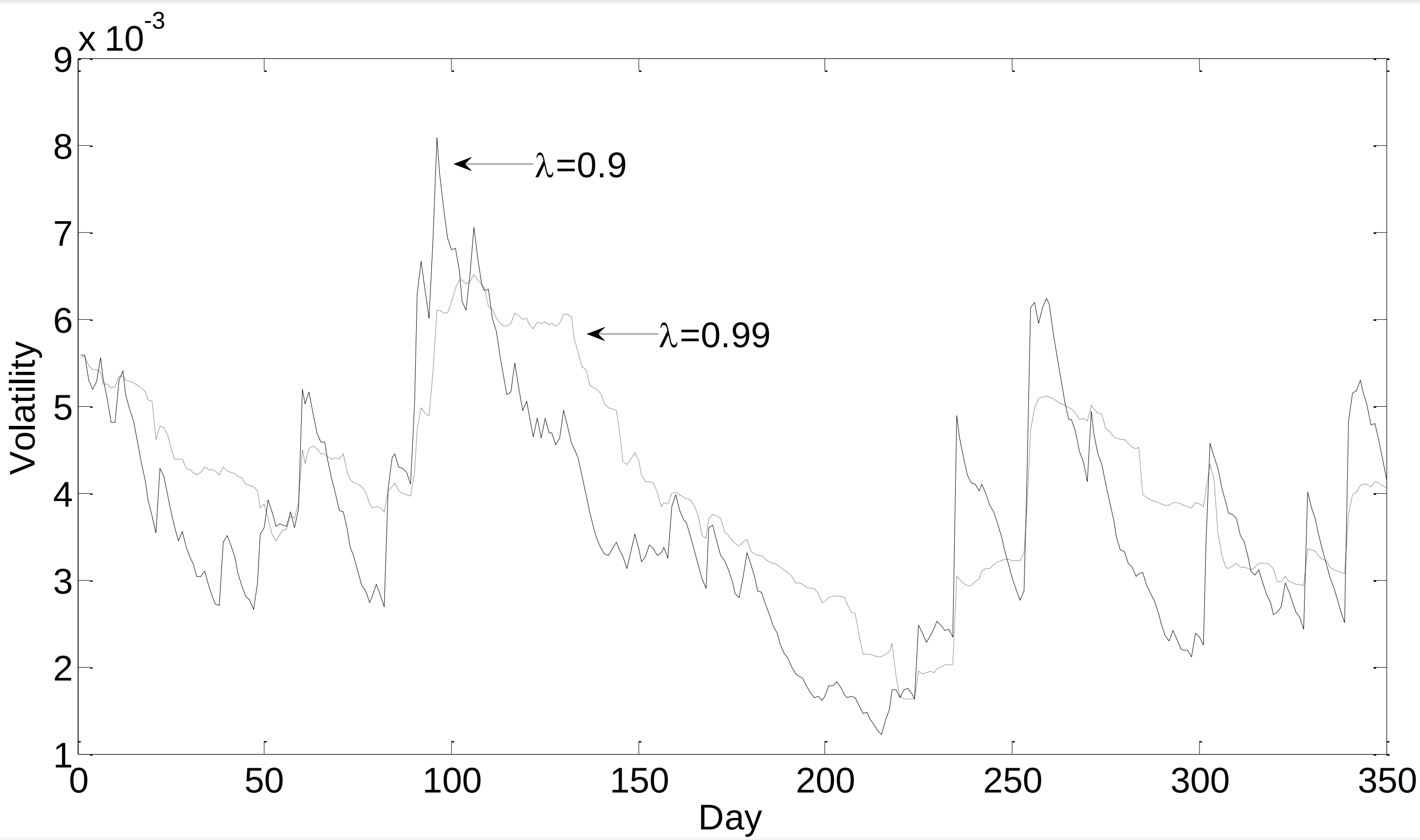
$$SMA \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{(k-1)} \sum_{S=t-k}^{t-1} (r_s - E(r_t))^2$$

$$EWMA \quad \sigma_t^2 = (1-\lambda) \sum_{S=t-k}^{t-1} \lambda^{t-s-1} (r_s - E(r_t))^2$$

تلاطم‌های تخمینی TEPDIX با استفاده از SMA



تلاطم‌های تخمینی TEPDIX با استفاده از EWMA



مدل‌های نوسان تصادفی

مدل‌های خودبازگشتی تعمیم‌یافته مشروط بر ناهمسانی واریانس

GARCH

مدل‌های خودبازگشتی مشروط بر ناهمسانی واریانس

ARCH

اساس شکل‌گیری مدل‌های GARCH

مطابق رایج‌ترین و ساده‌ترین مدل GARCH، بهترین پیش‌بینی‌کنندهٔ واریانس دورهٔ بعدی، از طریق میانگین موزون اقلام زیر بدست می‌آید.

- متوسط واریانس بلندمدت
- واریانس پیش‌بینی‌شدهٔ دورهٔ جاری
- اطلاعات جدید دورهٔ جاری

یک مثال ساده [I]

معامله‌گری را تصور کنید که می‌داند متوسط انحراف‌معیار بلندمدت روزانهٔ شاخص استاندارد اند پورز ۵۰۰، یک درصد است. وی در روز گذشته، انحراف‌معیار شاخص را برای امروز ۲ درصد پیش‌بینی کرده و بازدهٔ غیرمنتظره امروز نیز ۳ درصد است.

- بدیهی است که با دوره‌های پرتلاطمی مواجهیم و خصوصا امروز یک دورهٔ پرتلاطم است. مدل پیشنهاد می‌کند که پیش‌بینی روز آینده منعکس‌کنندهٔ تلاطم بیشتری باشد. با این‌حال این حقیقت که میانگین انحراف‌معیار بلندمدت تنها یک درصد است، پیش‌بینی‌کننده را به کاهش واریانس تخمینی رهنمون می‌شود.

یک مثال ساده [II]

- بهترین استراتژی برای برآورد واریانس به ارتباط بین روزها بستگی دارد. اگر این سه عدد را به توان دو برسانیم و به آن‌ها وزن یکسانی بدهیم، می‌توانیم پیش‌بینی روز آینده را به این‌طریق محاسبه کنیم.

$$\sqrt{\frac{1+4+9}{3}} = 2.16$$

یک مثال ساده [III]

به هر حال معامله‌گر به‌طور تجربی می‌داند که اگر به جای تخصیص اوزان مساوی، به‌ترتیب از وزن‌های 0.02، 0.9 و 0.08 برای این سه عدد استفاده کند، پیش‌بینی‌های دقیق‌تری خواهد داشت. بر این اساس، پیش‌بینی وی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\sqrt{0.02\times1+0.9\times4+0.08\times9}=2.08$$

مدل GARCH

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\,\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\,\sigma_{t-1}^2 \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^{\ 2})$$

$$\omega \ge 0,\ \alpha, \beta \ge 0,\ \alpha + \beta < 1$$

- میانگین (ω)
- اخبار راجع به تلاطم دورهٔ جاری (ε_{t-1}^2)
- پیش‌بینی اخیر واریانس (σ_{t-1}^2)

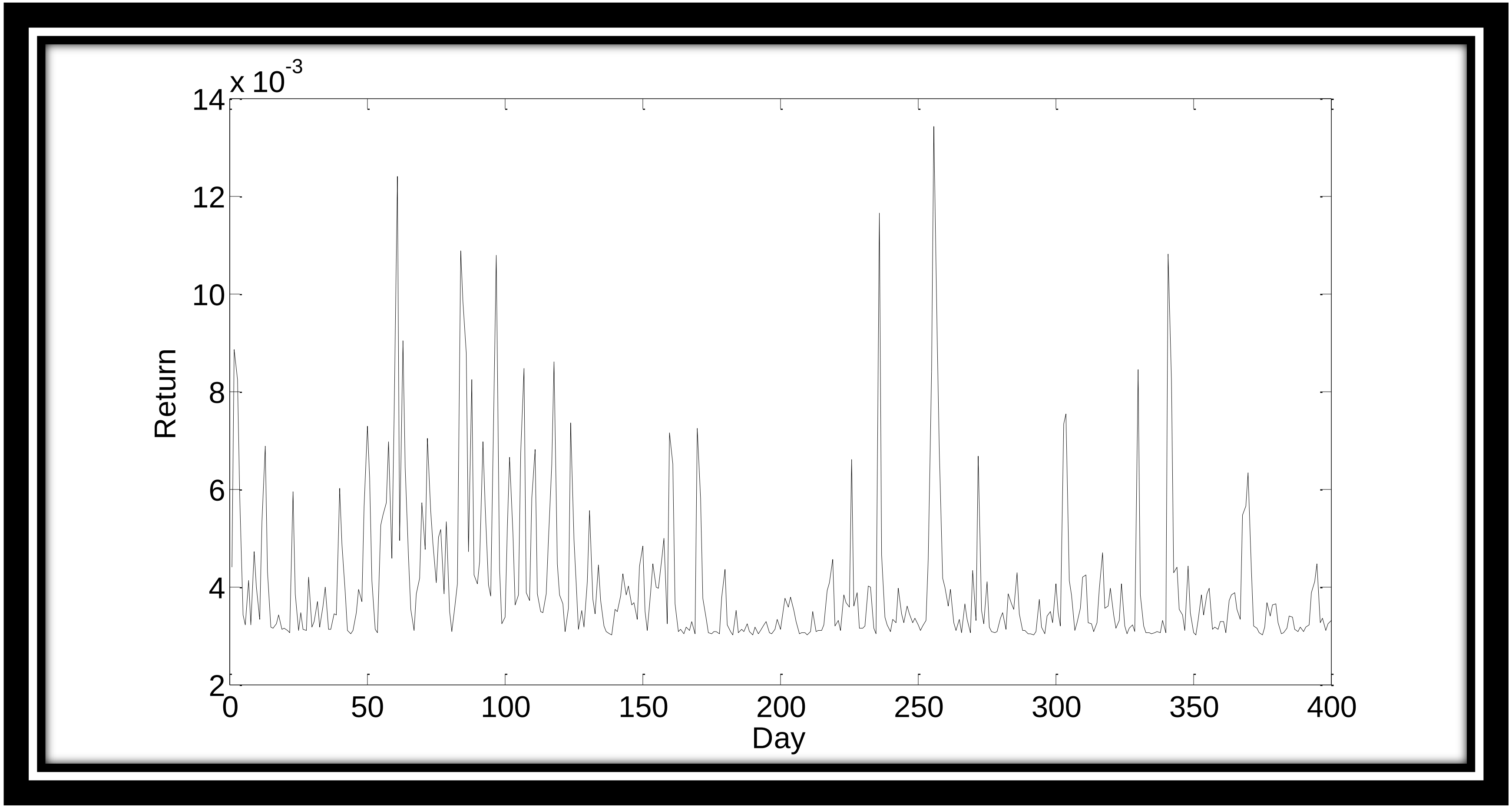
تعبیر پارامترها

می‌توان گفت:

مقدار بالای α گویای این است که تلاطم‌ها حساس است و به‌سرعت به تحرکات بازار واکنش نشان می‌دهد.

مقدار بالای ضریب β بدین معنی است که تلاطم‌ها باثبات است و مدتی طولانی جهت تغییر می‌طلبد.

تلاطم تخمینی مدل GARCH برای داده‌های بورس تهران



$$\sigma_t^2 = -0.000008 + 0.5\varepsilon_{t-1}^2 + 0.09\sigma_{t-1}^2 + \varepsilon_t$$

مدل GARCH– برآورد پارامترها

باقیمانده‌های استاندارد شده

$$z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t} = \frac{r_t - E(r_t)}{\sqrt{\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2}}$$

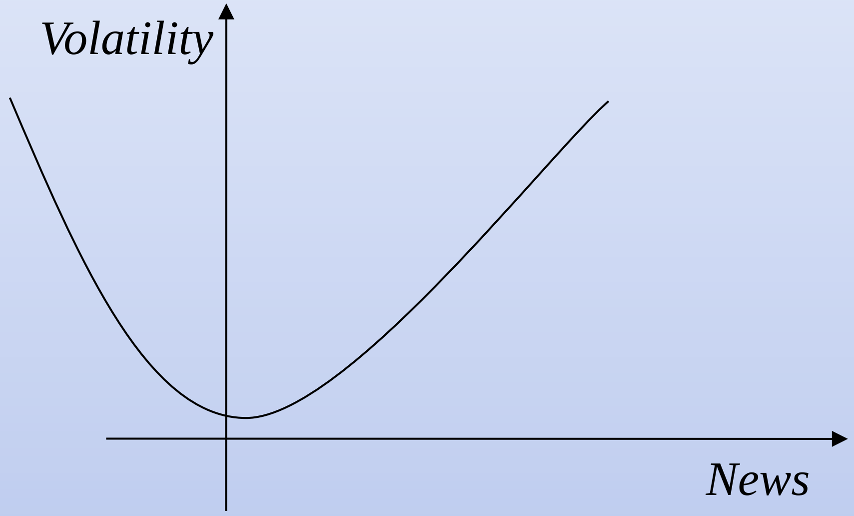
چگالی احتمال مشترک

$$\max L = \max \prod_{t=1}^{T} \varphi_t\left(z_t \middle| \mu_t, \sigma_t\right) = \max \prod_{t=1}^{T}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-z_t^2}{2}\right)\right)$$

نسخه‌های دیگر مدل GARCH

IGARCH	• Integrated GARCH
FGARCH	• Factor GARCH
GARCH-M	• GARCH-in-mean
AGARCH	• Asymmetric GARCH
CGARCH	• Components GARCH

اثر نامتقارن اخبار



مدل TGARCH

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2 I_{t-1} + \beta\sigma_{t-1}^2$$

$$I_t = \begin{cases} 1 & if \;\; \varepsilon_t < 0 \\ 0 & if \;\; \varepsilon_t \geq 0 \end{cases}$$

مدل‌های پیش‌بینی کوواریانس

- میانگین متحرک ساده
- میانگین متحرک با اوزان نمایی
- مدل‌های تلاطم تصادفی

میانگین متحرک ساده و نمایی

SMA

$$\sigma_{12,t} = \frac{1}{k}\sum_{S=t-k}^{t-1}(r_{1s}-\mu_1)(r_{2s}-\mu_2)$$

$EWMA$

$$\sigma_{12,t} = (1-\lambda)\sum_{S=t-k}^{t-1}\lambda^{t-s-1}(r_{1s}-\mu)(r_{2s}-\mu)$$

مدل GARCH

GARCH (1,1)

$$\sigma_{12,t} = \omega_{12} + \alpha_{12}\,\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + \beta_{12}\sigma_{12,t-1}$$

رویکردهای پارامتریک

مبتنی بر آمار ارزش فرین

نظریهٔ ارزش فَرین

تلاش‌ها برای حل مسأله ارزش‌های فرین در نهایت به ارایهٔ نظریهٔ ارزش فرین منجر گردید. نظریهٔ ارزش فرین شاخه‌ای از آمار کاربردی است که برای حل چنین مسائلی توسعه یافته است.

دلایل استفاده از نظریهٔ ارزش فرین

ارزش‌های فرین نادر است و طبق تعریف، مشاهدات کمی در دنباله‌های توزیع وجود دارد.

بر اساس مطالعات انجام‌گرفته وجود دنباله‌های متراکم و خصوصا غیرنرمال در سری بازدهٔ مالی مشهود است.

همیشه این احتمال وجود دارد که تحرکات فرین در قیمت دارایی‌ها توسط سازوکارهایی ایجاد شوند که به‌لحاظ ساختاری از عملکرد معمول بازار متفاوت باشد.

رویکردهای نظریهٔ ارزش فرین

رویکرد فراتر از آستانه

Peak Over Threshold

نظریهٔ تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین

Generalized Extreme Value Theory

رویکردهای پارامتریک

محاسبهٔ سنجهٔ ریسک

برآورد VaR

مدل‌های
پیش‌بینی بازده

$$VaR_t = -P_{t-1} \times (\mu_t - \sigma_t z_\alpha)$$

مدل‌های
پیش‌بینی تلاطم

سؤالات

- فرآیند کامل مدل‌سازی ریسک را با فرآیند ساده‌شده مقایسه کنید.
- نگاشت پرتفوی و بردار کلیدی ریسک را تعریف کنید.
- "بر اساس شواهد، توزیع سری بازدهٔ مالی نرمال غیرشرطی است." صحت و سقم این گزاره را بررسی کنید.
- ناهمسانی واریانس چه رابطه‌ای با خوشه‌بندی تلاطم دارد؟ توضیح دهید.
- مفرضات روش حداکثر درست‌نمایی (MLE) کدامند؟ این روش بر چه اساسی پارامترها را تخمین می‌زند؟
- در کدام مدل‌ها خوشه‌بندی تلاطم به‌عنوان یکی از ویژگی‌های سری بازدهٔ مالی به‌طرز شایسته‌تری در مدل‌سازی لحاظ می‌شود.
- رویکردهای تاریخ‌محور مدل‌سازی ریسک را با رویکرد تلاطم ضمنی مقایسه کنید.
- نشان دهید وقتی تابع توزیع متغیر تصادفی دوجمله‌ای باشد، حاصل تخمین پارامترهای "احتمال موفقیت" (یا احتمال شکست) در توزیع یادشده با استفاده از روش MLE با "نسبت تعداد موفقیت‌ها (یا شکست‌ها) به تعداد کل تکرارها" برابر است.
- نشان دهید زمانی که توزیع سری بازدهٔ مالی نرمال غیرشرطی است، حاصل تخمین پارامترهای توزیع با استفاده از روش MLE با پارامترهای توزیع نرمال (میانگین و واریانس) یکی است.

با تشکر