به نام آنکه جان را فکرت آموخت

بسم الله الرحمن الرحیم

مدیریت سبد اوراق قرضه با استفاده از

برنامه‌ریزی تصادفی

Bond Portfolio Management Using

Stochastic Programming

حسین عبده تبریزی

میثم رادپور

دانشکدۀ حسابداری و مدیریت دانشگاه تهران، فروردین ماه سال ۹۳

برنامه‌ریزی ریاضی در شرایط عدم‌اطمینان

- ✓مالی و عدم‌اطمینان
- ✓رویکردهای مواجه با عدم‌اطمینان
- ✓برنامه‌ریزی تصادفی در مقابل برنامه‌ریزی قطعی

مالی و عدم‌اطمینان

- اغلب مدل‌های مالی شامل عدم‌اطمینان هستند:
  - بهینه‌سازی سبد اوراق بهادار با استفاده از مدل میانگین-واریانس مارکویتز
  - بهینه‌سازی سبد اوراق بهادار با استفاده از مدل میانگین مطلق انحرافات کونو و یامازاکی (Konno and Yamazaki)
  - مدل قیمت‌گذاری اختیارمعامله
  - مدل برنامه‌ریزی عددصحیح برای ساختن صندوق شاخص

مواجه با عدم‌اطمینان

روش غیرمستقیم

- در تمامی مدل‌های یادشده عدم‌اطمینان از طریق ایجاد مدلی قطعی ادراه می‌شود؛ مدلی ریاضی که تلویحاً برخی ویژگی‌های تصادفی موجود در این مسائل را لحاظ می‌کند.

روش مستقیم

- روش مستقیم مواجهه با عدم‌اطمینان، ایجاد چارچوبی برای مدل‌سازی است؛ چارچوبی که اجازه می‌دهد عدم‌اطمینان تصریحاً مدل‌سازی شود. (وارد مدل شود)

چارچوب‌های مدل‌سازی عدم‌اطمینان

چارچوب‌های ... موجودند. دو

عدم‌اطمینانی که در هر دوی این
چارچوب‌ها مدل‌سازی می‌شود
عدم‌اطمینان در پارامترهای ورودی
است.

برنامه‌ریزی قطعی در مقابل تصادفی

برنامه‌ریزی تصادفی

stochastic programming

برنامه‌ریزی قطعی

deterministic programming

عدم اطمینان و برنامه‌ریزی تصادفی

در دنیای واقعـی، پارامترهـای مسـائل بهینـه‌سـازی عمومـاً بـا عدم‌اطمینان همراهند.

برنامه‌ریزی تصادفی چارچوبی است برای مدل‌سازی مسـائل بهینه‌سازی‌ای که با عدم‌اطمینان همراهند.

برنامه‌ریزی تصادفی از توزیـع احتمـال پارامترهـای نـامطمئن برای مدل‌سازی و حل مسائل بهینه‌سازی بهره می‌گیرد.

برنامه‌ریزی تصادفی

تعریف

- برنامه‌ریزی تصادفی همان‌طور که از نامش پیداست، نوعی برنامه‌ریزی ریاضی (خطی، عدد صحیح، ترکیبی، غیرخطی) است، با این ویژگی که داده‌های آن شامل عنصر تصادفی اند.
- در برنامه‌ریزی تصادفی فرض می‌شود که داده‌ها (پارامترهای) نامعلوم متغیرهایی تصادفی اند که توزیع احتمال مشخصی دارند. از این اطلاعات برای تبدیل برنامه‌ریزی تصادفی به معادل قطعی (deterministic equivalent) استفاده می‌شود.

عدم‌اطمینان

عدم‌اطمینان با فضای نمونه Ω، تشریح می‌شود.

در برنامه‌ریزی تصادفی Ω اغلب مجموعه‌ای محدود است.

$$\{\omega_1, \ldots, \omega_S\}$$

احتمالات مربوط به این مجموعه محدودیت‌های زیر را برآورده می‌سازد:

$$p(\omega_k) \geq 0 \quad \sum_{k=1}^{S} p(\omega_k) = 1$$

عدم اطمینان: مثال

اگر دو بار سکه را پرتاب کنیم:

Ω شامل مجموعه‌ای به شرح ذیل است:

$$\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$$

احتمالات مربوط به هر عضو این مجموعه برابر است با:

$$^{1}/_{4}$$

انواع برنامه‌ریزی تصادفی (I)

برنامه‌ریزی تصادفی با محدودیت‌های احتمالی (شانسی)

- with probabilistic (chance) constraints

برنامه‌ریزی تصادفی با دستاویز

- with recourse

انواع برنامه‌ریزی تصادفی (II)

انواع برنامه‌ریزی تصادفی بر اساس رویکردهای مواجهه با محدودیت‌های برنامه نام‌گذاری شده‌اند.

- برنامه‌ریزی تصادفی با دستاویز
  - تخطی از محدودیت‌ها مشمول جریمه می‌شود.
- برنامه‌ریزی تصادفی با محدودیت‌های احتمالی
  - محدودیت‌ها در سطح اطمینان مشخصی برآورده می‌شوند.

برنامه‌ریزی تصادفی با محدودیت‌های احتمالی

- ✓ مثال: برنامه‌ریزی خطی با دو تاس

عدم‌اطمینان در پرتاب تاس

فرض کنید دو تاس در اختیار داریم: نتیجه‌ی حاصل از پرتاب یکی از تاس‌ها را با a_1 و دیگری را با a_2 نمایش می‌دهیم.

- با فرض این‌که هر دو تاس سالم اند، برای a_1 و a_2 توزیع احتمال گسسته‌ای به شرح ذیل خواهیم داشت:

a_1=i (i=1,...,6) with probability 1/6
a_2=j (j=1,...,6) with probability 1/6

برنامه‌ریزی خطی با محدودیت‌های احتمای

- حال برنامه‌ریزی خطی زیر با دو متغیر و یک محـدودیت را در نظـر بگیرید:

minimize 5x+6y
subject to: $a_1x + a_2y >= 3$
$x,y >= 0$

- این برنامه‌ریزی خطی چه تعبیری دارد؟ اگر a_1 و a_2 اعداد معینی بودند، این برنامه‌ریزی تعبیر مشخصی داشت، اما این‌گونه نیست.

معادل قطعی برنامه‌ریزی تصادفی

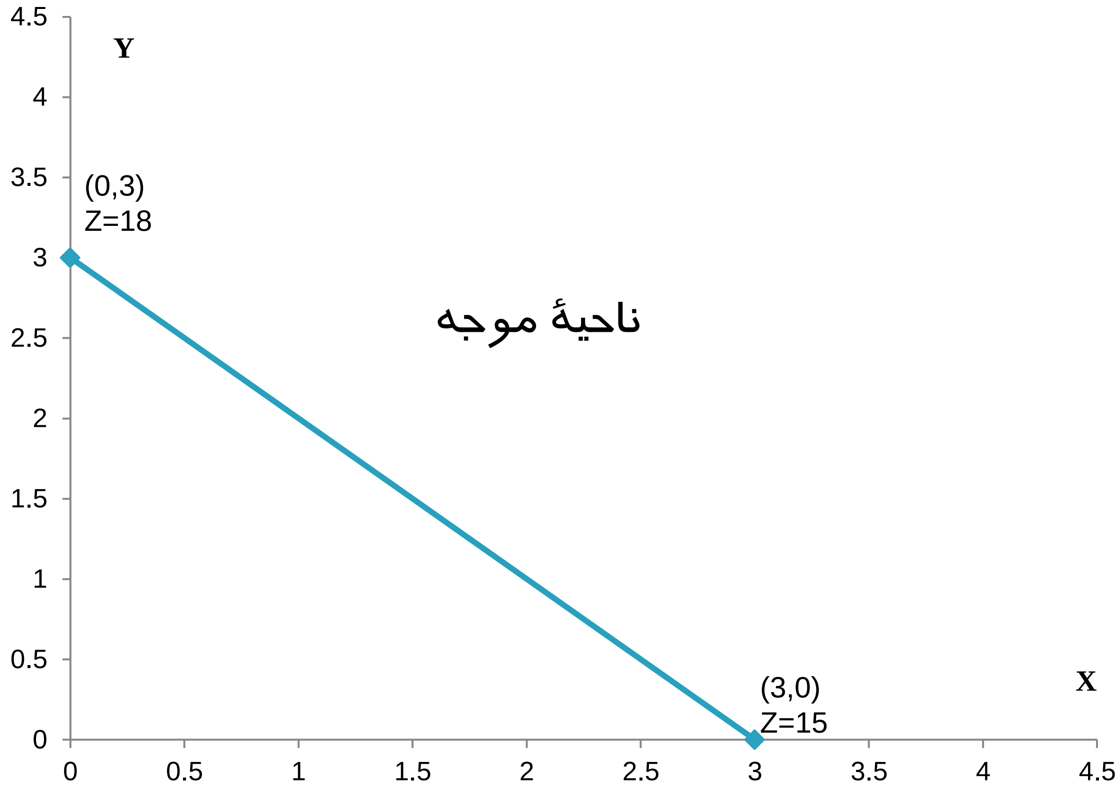
این برنامه‌ریزی خطی را می‌توان این گونه تعبیر کرد: ما می‌خواهیم محدودیت $a_1x + a_2y >= 3$ برای تمامی مقادیر ممکن a_1 و a_2 برقرار باشد. بدین ترتیب برنامه‌ریزی خطی قطعی‌ای با دو متغیر و ۳۶محدودیت خواهیم داشت:

minimize $5x+6y$
subject to: $ix + jy >= 3$ $\quad i=1,...,6 \quad j=1,...,6$
$x,y >= 0$

ناحیه‌ی موجه و جواب بهینه

- ناحیه‌ی موجه این برنامه‌ریزی تصادفی به شرح ذیل است. بدین ترتیب جواب برنامه‌ریزی خطی عبارت است از:

$$x=3,\ y=0$$



لحاظ سطح اطمینان برای محدودیت

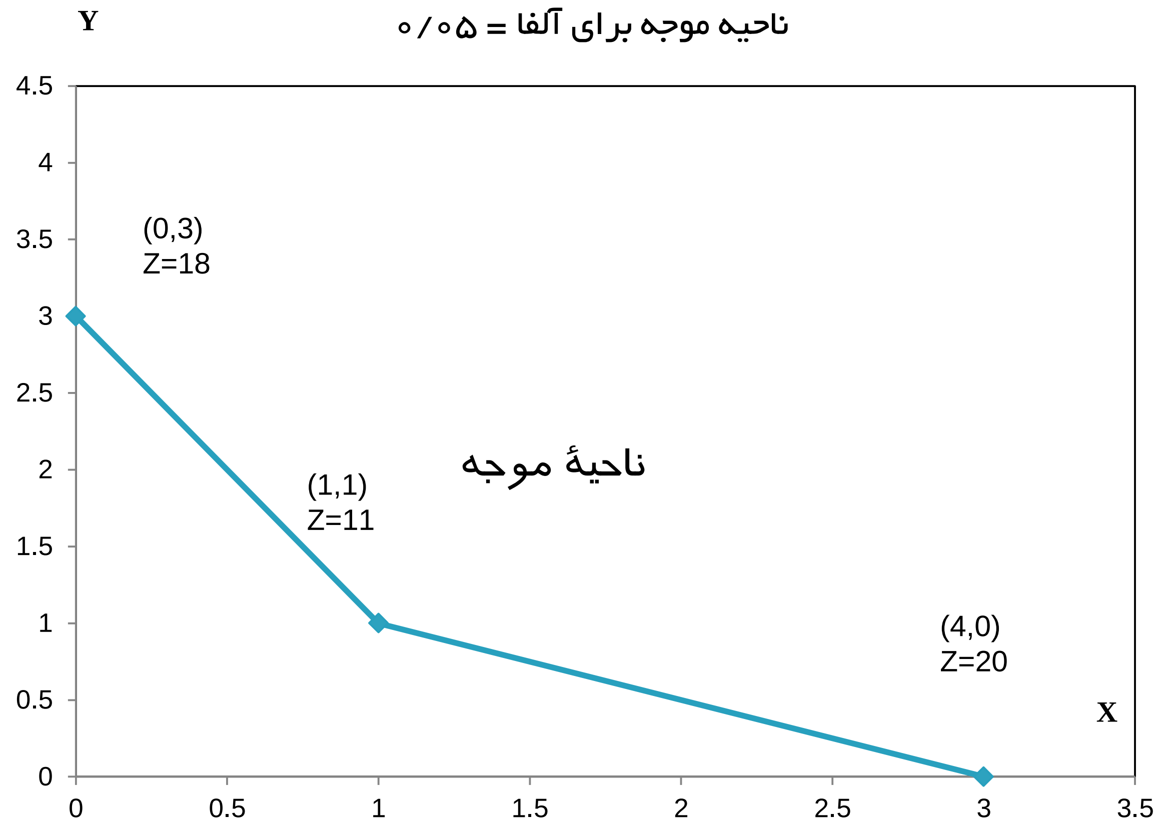
حال اگر به جای این که اصرار داشته باشیم که محدودیت یادشده برای برای تمامی مقادیر a_1 و a_2 برقرار باشد، برای سطح اطمینان معینی مانند مثلاً ۹۵ درصد برقرار باشد، خواهیم داشت:

minimize 5x+6y
subject to: Prob(a_1x + a_2y >= 3) >= *1-alpha*
x,y >= 0

ناحیه‌ی موجه و جواب بهینه در سطح اطمینان ۹۵ درصد

- بدین ترتیب در سطح اطمینان ۹۵ درصد جواب برنامه‌ریزی خطی عبارت است از:

x=1, y=1



برنامه‌ریزی تصادفی با دستاویز

- ✓ برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای
- ✓ مثال: برنامه‌ریزی خطی تولید
- ✓ مدل عمومی برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای

انواع متغیرهای تصمیم

متغیرهای پیشبینانه (anticipative variables)

- به تصمیم‌هایی مربوط می‌شوند که باید این‌جا و اکنون (here and now) اخذ شوند؛ تصمیماتی که به مشاهدات آتی یا به‌عبارتی به تحقق پارامترهای تصادفی بستگی ندارند. به بیان دیگر این متغیرها، تصمیماتی را شامل می‌شوند که باید قبل از رفع عدم‌اطمینان اخذ شوند. تمامی برنامه‌های تصادفی شامل متغیرهای پیشبینانه اند.

متغیرهای انطباقی (adoptive variables)

- به تصمیم‌های صبر کن و نظاره کن (wait and see) مربوط می‌شوند؛ تصمیماتی که بعد از تحقق قسمتی (یا گاهی اوقات کل) پارامترهای تصادفی اخذ می‌شوند. به بیان دیگر این متغیرها، تصمیماتی را شامل می‌شوند که باید بعد از رفع عدم‌اطمینان اخذ شوند.

برنامه‌ریزی تصادفی با دستاویز

متغیرهای پیشبینانه

متغیرهای انطباقی

برنامه‌ریزی تصادفی با دستاویز

ویژگی‌های مدل‌های دستاویز

- مدل‌های دستاویز به‌طورآشکار مفهوم زمان را شامل می‌شوند.
- در این مدل‌ها عدم‌اطمینان طی مراحل گسسته‌ی زمانی رفع می‌شود.
- حل این برنامه‌های تصادفی در واقع تنها شامل یافتن مقادیر بهینه‌ی متغیرهای پیشبینانه است.
- بعد از این‌که بخشی از عدم‌اطمینان رفع شد برنامه‌ی تصادفی دیگری داریم که در آن متغیرهایی که قبلاً انطباقی لحاظ می‌شدند، به پیشبینانه بدل می‌شود.

ساده‌ترین شکل برنامه‌ریزی تصادفی با دستاویز

مرحله‌ی اول

در مرحله‌ی اول تصمیمی می‌گیریم.

مرحله‌ی دوم

در مرحله‌ی دوم شاهد تحقق عنصر تصادفی مسأله هستیم، و مجازیم برای اجتناب از این‌که در ناحیه‌ی غیرموجه قرار بگیریم، تصمیمات دیگری اتخاذ کنیم.

برنامه‌ریزی خطی تولید (I)

فرض کنید باید در مورد تعداد تولید کالای X تصمیم بگیریم. کالای X به‌منظور تأمین تقاضای مشتریان در دوره‌ی زمانی بعدی تولید می‌شود و تولید هر واحد X هزینه‌ای معادل دو دلار به همراه دارد. تقاضای مشتریان تصادفی است و توزیع گسسته‌ی D_s با احتمال $(s=1,\ldots,S)$ p_s دارد. درواقع تعداد S سناریو برای تقاضای آتی داریم.

برنامه‌ریزی خطی تولید (II)

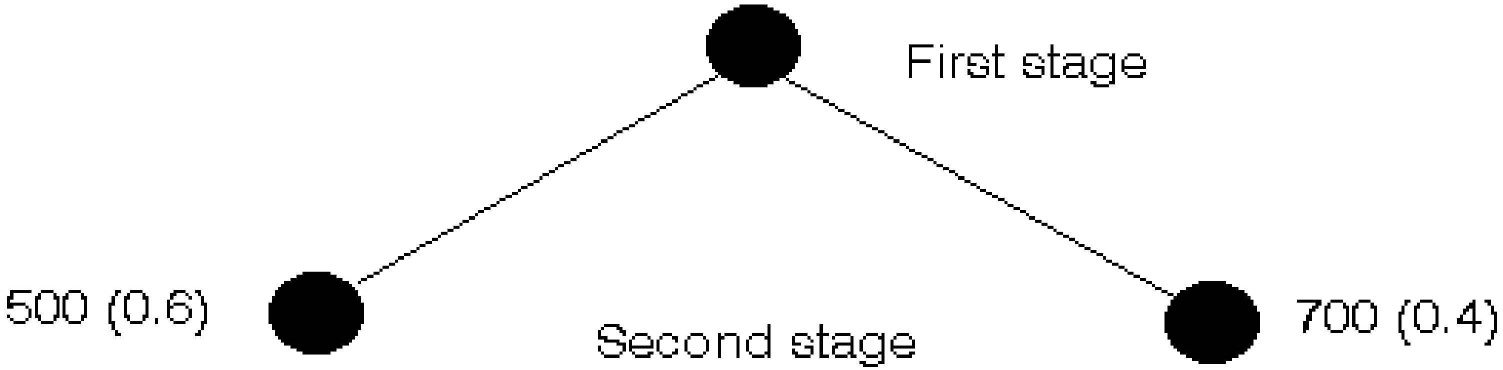
تقاضای مشتریان باید برآورده شود. ما از این امکان برخورداریم که برای تأمین تقاضای واقعی مشتریان، کالای X را از تأمین‌کننده‌ی خارجی بخریم. این خرید برای هر واحد کالای X سه دلار هزینه به بار می‌آورد. یعنی اگر تقاضای مشتریان از تولید فراتر رود، می‌توانیم به منبع دیگری از عرضه‌ی کالای X متوسل (recourse) شویم.

در حال حاضر چقدر باید تولید کنیم، در حالی‌که تقاضای آتی مشتریان را نمی‌دانیم؟

توزیع احتمال تقاضا: دو سناریو

- فرض کنید توزیع احتمال تقاضای آتی مشتریان به صورت زیر است:

$S=2$ and $D_1=500$, $p_1=0.6$; $D_2=700$, $p_2=0.4$



Numbers are demand(probability)

راه حل گمراه‌کننده

پاسخ بهینه مقدار موردانتظار تقاضاست.

- پاسخ بهینه، مقدار موردانتظار تقاضا یعنی $x=580$ نیست.
- پاسخ بهینه از طریق برنامه‌ریزی تصادفی به‌دست می‌آید.
- این دو پاسخ بسته به مقادیر پارامترهای مسأله (هزینه‌ی تولید و هزینه‌ی خرید) ممکن بسیار متفاوت باشند.

مراحل

- یک راه پرداختن به این مسأله‌ی دو مرحله‌ای به‌صورت زیر است:

در مورد تعداد تولید تصمیم می‌گیریم.

مرحله‌ی اول: عمل

تحقق عنصر تصادفی (تقاضای مشتریان) را مشاهده کنید.

مرحله‌ی واسط: مشاهده

در بر اساس تقاضای مشاهده‌شده تصمیم‌های دیگری اخذ کنید.

مرحله‌ی دوم: عکس‌العمل

متغیرها

- **متغیرهای تصمیم**

تعداد واحد کالای X که در حال حاضر (مرحله‌ی اول) تولید می‌شود.

مرحله‌ی اول: x_1

: تعداد واحد کالای X که در مرحله‌ی دوم با تحقق تصادفی سناریوهای تقاضا یعنی Ds (s=1,...,S) خریداری می‌شود.

مرحله‌ی دوم: y_{2s}

برنامه‌ی تصادفی

برنامه‌ی تصادفی این مسأله به شرح زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } 2x_1 + \Sigma p_s(3y_{2s}) \\
&\text{subject to } x_1 + y_{2s} >= D_s \qquad s=1,\ldots,S \\
&\qquad\qquad\quad x_1 >= 0 \\
&\qquad\qquad\quad y_{2s} >= 0 \qquad\qquad s=1,\ldots,S
\end{aligned}
$$

تعبیر برنامه‌ریزی تصادفی تولید

حل این برنامه‌ی تصادفی به ما می‌گوید:

- مقداری برای x_1 به‌دست می‌آوریم که مقدار تولید موردنیاز در زمان حال است.
- هم‌چنین مجموعه‌ای از مقادیر برای y_{2s} به‌دست می‌آوریم. یعنی به ازای هر سناریوی تقاضای مشتری (S سناریو) یک مقدار برای y_{2s} به‌دست می‌آوریم.
- وقتی تقاضای مشتری معلوم می‌شود (یعنی به محض این‌که یک سناریو از تقاضای تصادفی محقق می‌شود) دیگر سناریوها نامربوط می‌شوند.

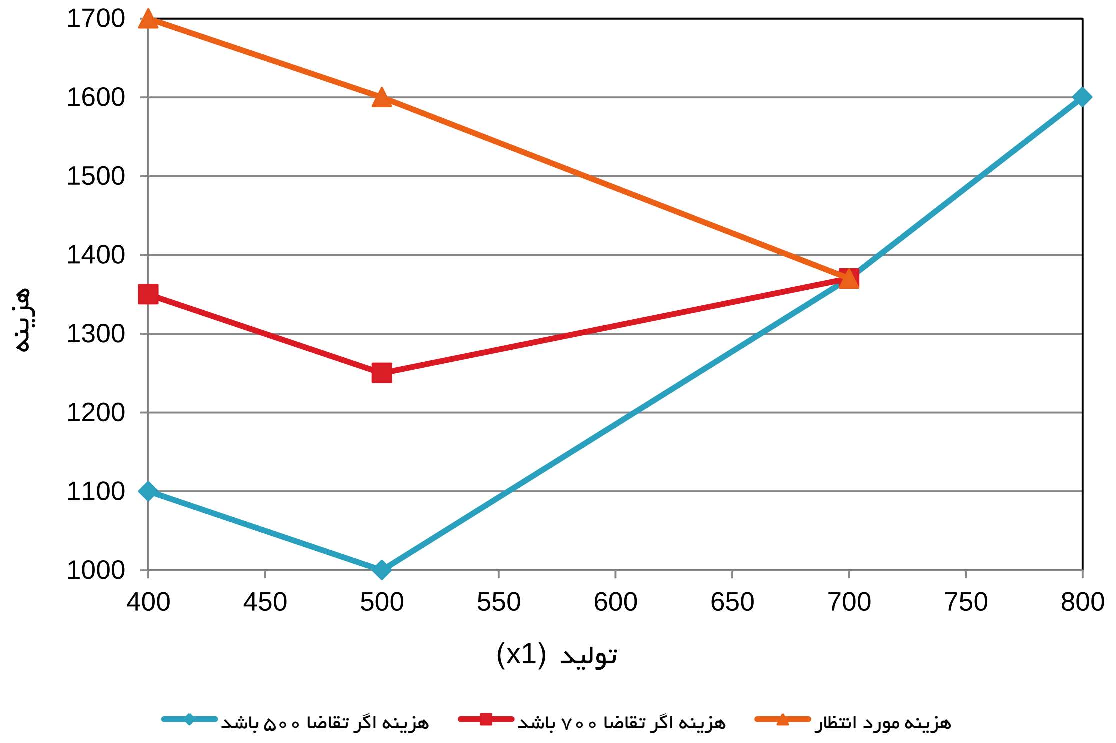
برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای

- **خلاصه**
  - تصمیم‌های مرحله‌ی یک را اتخاذ کنید، در این زمان تنها توزیع احتمال متغیرهای تصادفی را می‌دانیم.
  - برای حفظ موجه‌بودن محدودیت‌ها متغیرهای مرحله‌ی دو را دستاویز قرار دهید، این متغیرها به ازای مقادیر مختلف متغیر تصادفی، مقادیر مختلفی به خود می‌گیرند.
  - هزینه‌ی موردانتظار کل را کمینه کنید. این هزینه شامل مجموع هزینه‌های قطعی تصمیم‌های مرحله‌ی یک و هزینه‌های موردانتظار تصمیم‌های مرحله‌ی دو است.

جواب بهینه

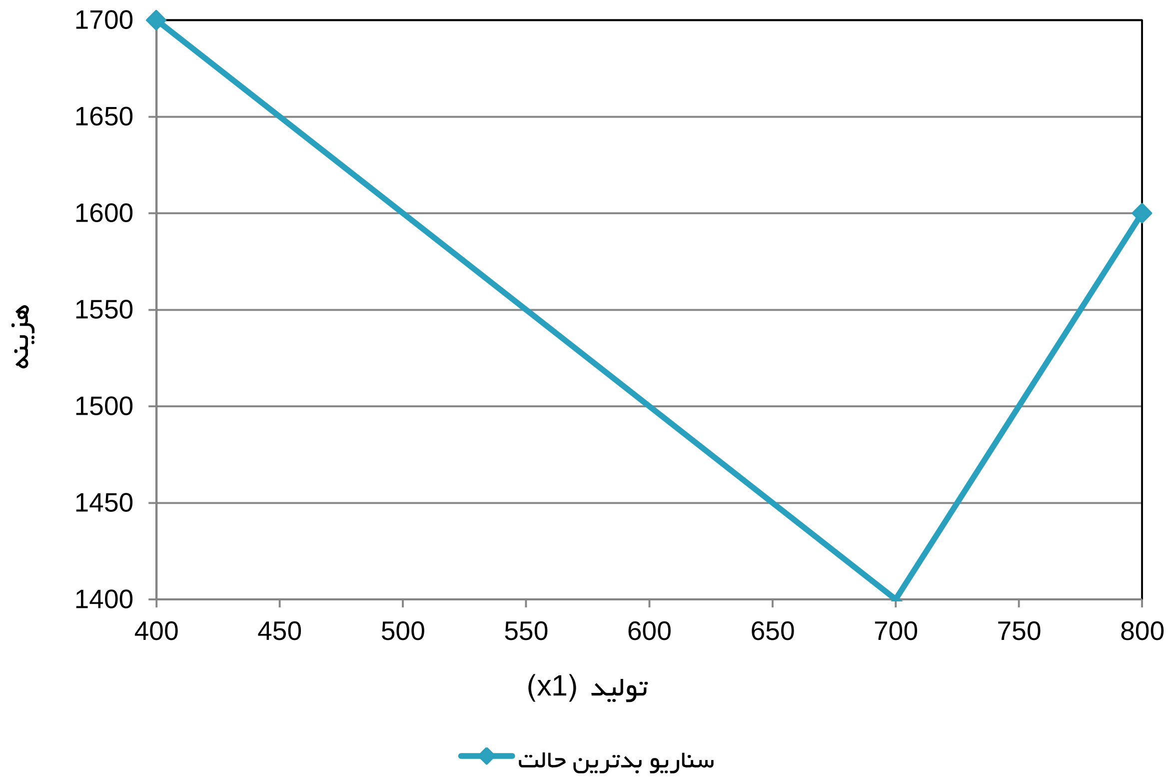
- بـدین ترتیـب جـواب برنامـه‌ریـزی تصـادفی عبـارت اسـت از:

x=500



سناریوی بدترین حالت

- اغلب در برنامه‌ریزی تصادفی سناریوی بدترین حالت را بررسی می‌کنیم: در این حالت باید ۷۰۰ واحد از کالای X تولید کنیم.



شکل عمومی برنامه‌ریزی تصادفی

برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای با دستاویز: رویکرد نمایش برداری

رخداد تصادفی

بردار متغیرهای تصمیم
مرحله‌ی اول

بردار متغیرهای تصمیم
مرحله‌ی دوم (متغیرهای
دستاویز)

$$\begin{array}{lccccc} \max_x & a^T x & + & E[\max_{y(\omega)} c(\omega)^T y(\omega)] & & \\ & Ax & & & = & b \\ & B(\omega)x & + & C(\omega)y(\omega) & = & d(\omega) \\ & x \geq 0, & & y(\omega) \geq 0. & & \end{array}$$

محدودیت‌های قطعی برای
متغیرهای تصمیم مرحله‌ی اول

محدودیت‌های تصادفی رابط مت
دستاویز و متغیرهای تصمیم مرح

شکل عمومی برنامه‌ریزی تصادفی

برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای با دستاویز: رویکرد نمایش مبتنی بر سناریو

$$
\begin{aligned}
\max_x \quad & a^T x + \sum_{k=1}^{S} p_k \max_{y_k} c_k^T y_k \\
& Ax = b \\
& B_k x + C_k y_k = d_k \qquad \text{for } k = 1, \dots S \\
& x \geq 0 \\
& y_k \geq 0 \qquad \text{for } k = 1, \dots, S.
\end{aligned}
$$

- ✓ برای هر سناریوی k یک بردار متغیر تصمیم مرحله‌ی دوم وجود دارد.
- ✓ مقدار بیشینه‌ی تابع هدف از طریق بهینه‌سازی تمامی متغیرهای تصمیم مرحله اول و دوم حاصل می‌شود.

شکل عمومی برنامه‌ریزی تصادفی

برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای با دستاویز: معادل قطعی

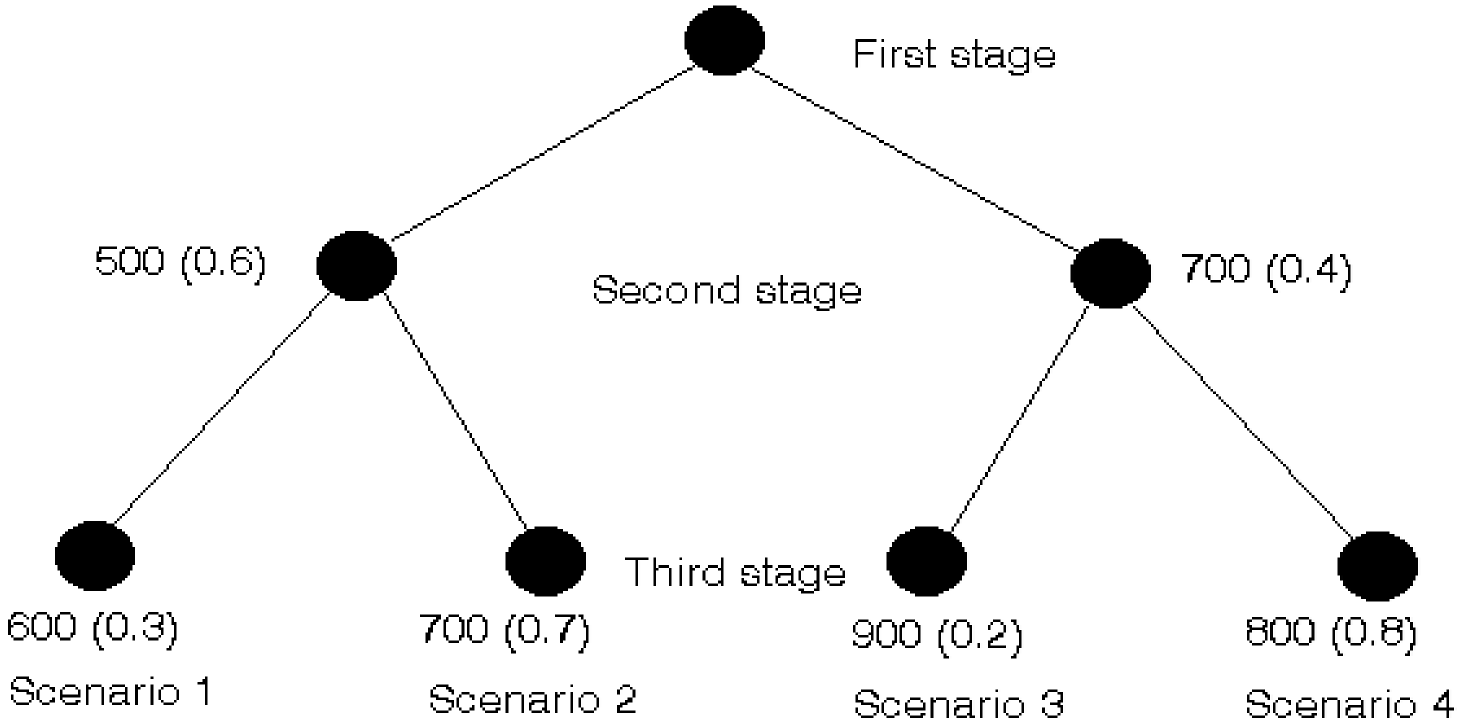
$$
\begin{array}{lccccccccc}
\max_{x,y_1,\ldots,y_S} & a^T x & + & p_1 c_1^T y_1 & + & \cdots & + & p_S c_S^T y_S & & \\
& Ax & & & & & & & = & b \\
& B_1 x & + & C_1 y_1 & & & & & = & d_1 \\
& \vdots & & & & \ddots & & & & \vdots \\
& B_S x & & & & & + & C_S y_S & = & d_S \\
& x, & & y_1, & & \ldots & & y_S & \geq & 0.
\end{array}
$$

✓ این مسأله تعداد S نسخه از متغیرهای تصمیم مرحله‌ی دوم را دارد.

برنامه‌ریزی تصادفی با دستاویز

- ✓برنامه‌ریزی تصادفی سه مرحله‌ای
- ✓مثال: برنامه‌ریزی خطی تولید

برنامەریزی خطی تولید: مراحل (سه مرحله)



A two-level (three-stage) binary scenario tree

Numbers are demand(probability)

مراحل برنامه‌ریزی تولید

- **مراحل برنامه‌ریزی تصادفی**
  - در مرحله‌ی اول: تصمیم‌گیری در مورد مقدار تولید- x_1
  - در مرحله‌ی دوم: تحقق مقدار عنصر تصادفی (تقاضا)
    - ✓تصمیم‌گیری در مورد مقادیر متغیرهای دستاویز- y_{2s}
    - ✓تصمیم‌گیری در مورد مقدار تولید- x_{2s}
  - در مرحله‌ی سوم: تحقق مقدار عنصر تصادفی (تقاضا)
    - ✓تصمیم‌گیری در مورد مقادیر متغیرهای دستاویز y_{3s}

محدودیت‌ها

- **لحاظ محدودیت‌ها**
  - در مرحله‌ی اول برای تضمین تقاضا خواهیم داشت:

$x_1 + y_{2s} >= 500$ (s=1,2)

$x_1 + y_{2s} >= 700$ (s=3,4)

  - در مرحله‌ی دوم موجودی‌ای برای تأمین تقاضای اضافی مشـتریان باقی می‌ماند، این موجودی به‌علاوه‌ی میزان تولید در مرحله‌ی دوم به‌علاوه‌ی میزان خرید باید بزرگ‌تـر یـا مسـاوی میـزان تقاضـا در مرحله‌ی سوم باشد:

$x_1 + y_{2s} - 500 + x_{2s} + y_{3s} >= 600$ (s=1)

$x_1 + y_{2s} - 500 + x_{2s} + y_{3s} >= 700$ (s=2)

$x_1 + y_{2s} - 700 + x_{2s} + y_{3s} >= 900$ (s=3)

$x_1 + y_{2s} - 700 + x_{2s} + y_{3s} >= 800$ (s=4)

محدودیت‌های پیش‌بینی ناپذیری

محدودیت‌های پیش‌بینی ناپذیری

- سناریوهایی که گذشته‌ی مشترکی دارند، مجموعه تصمیم‌های مشابهی دارند:

محدودیت‌های پیش‌بینی ناپذیری

برای سناریوهای ۳ و ۴ در مرحله‌ی دوم:

$y_{23}=y_{24}$

$x_{23}=x_{24}$

برای سناریوهای ۱ و ۲ در مرحله‌ی دوم:

$y_{21}=y_{22}$

$x_{21}=x_{22}$

برنامه‌ریزی تصادفی تولید

- تابع هدف

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } 2x_1 &+ 0.18(2x_{21} + 3y_{21} + 3y_{31}) \\
&+ 0.42(2x_{22} + 3y_{22} + 3y_{32}) \\
&+ 0.08(2x_{23} + 3y_{23} + 3y_{33}) \\
&+ 0.32(2x_{24} + 3y_{24} + 3y_{34})
\end{aligned}
$$

- محدودیت‌ها

subject to

$x_1 + y_{2s} >= 500$ (s=1,2)

$x_1 + y_{2s} >= 700$ (s=3,4)

$x_1 + y_{2s} - 500 + x_{2s} + y_{3s} >= 600$ (s=1)

$x_1 + y_{2s} - 500 + x_{2s} + y_{3s} >= 700$ (s=2)

$x_1 + y_{2s} - 700 + x_{2s} + y_{3s} >= 900$ (s=3)

$x_1 + y_{2s} - 700 + x_{2s} + y_{3s} >= 800$ (s=4)

$y_{21}=y_{22}$

$x_{21}=x_{22}$

$y_{23}=y_{24}$

$x_{23}=x_{24}$

all variables >=0

جواب بهینه

با حل این برنامه‌ریزی تصادفی به این نتیجه می‌رسیم که باید در حال حاضر ۷۰۰ واحد تولید کنیم.

برنامه‌ریزی تصادفی در مالی

- ✓ برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای
- ✓ مثال: مدیریت سبد اوراق قرضه

کاربردهای عملی: مدل مدیریت دارایی-بدهی (I)

- ✓ شرکت Russell-Yasuda Kasai هفتمین شرکت بزرگ بیمه‌ی اموال و حوادث در دنیاست.
- ✓ ارزش دارایی‌های شرکت بیش از ۳.۴۷ تریلیون یوآن است.
- ✓ ساختار بدهی‌های شرکت پیچیده است. شرکت به‌دنبال ابزاری است که با لحاظ محدودیت‌های مدیریت دارایی، درآمد حاصل از دارایی‌هایش را بیشینه کند.
- ✓ شرکت متخصصانی را استخدام می‌کند تا با استفاده از مدل مدیریت دارایی-بدهی مبتنی بر برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌ای هدف خود را محقق سازد.

کاربردهای عملی: مدل مدیریت دارایی-بدهی (II)

تصمیمات

- مقادیر سرمایه‌گذاری در دارایی‌های مختلف

رخدادهای تصادفی

- بازده سرمایه‌گذاری هر دارایی
- پرداخت‌های مربوط به تعهدات (liabilities)

محدودیت‌ها

- محدودیت‌های تخصیص دارایی
- محدودیت‌های وام‌گیری
- محدودیت‌های مربوط به تعهدات (liabilities)

کاربردهای عملی: مدل مدیریت دارایی-بدهی (III)

ارزیابی عملکرد مدل

- در مقایسه با معیار عملکردی که شرکت برای ارزیابی ارزش افزوده‌ی مدل ایجاد کرده بود، مدل یادشده ۹.۵ میلیارد یوآن درآمد سالانه‌ی شرکت را افزایش می‌داد.

مسأله‌ی مدیریت سبد اوراق قرضه

تصمیمات	• مقادیر سرمایه‌گذاری در اوراق قرضه‌ی مختلف
رخدادهای تصادفی	• تغییرات نرخ بهره
محدودیت‌ها	• محدودیت‌های موجودی • محدودیت‌های بودجه • دیرش

برنامه‌ریزی تصادفی مدیریت اوراق قرضه

- تابع هدف

$$\sum_{s} p_s U(W_T^s)$$

$$W_T^s = \sum_j \xi_{jT}^s z_{jT}^s + y_T^{+s} - \alpha y_T^{-s}$$

پارامترها

L_t	مقدار جریان‌های نقدی خروجی ناشی از تعهدات در مرحله‌ی t، جریان‌های نقدی ورودی با علامت منفی در مدل وارد می‌شوند.
S	مجموعه سناریوها S=0…-S که به عنوان مسیرهای منحصر به فرد می‌باشضد و از گره اول در مرحله‌ی t=0 تا گره نهایی در مرحله‌ی t=T در درخت سناریوها
r_t^S	نرخ بهره‌ی معتبر برای دوره‌ی t-1 تا t
p^S	احتمال سناریوی S که با این رابطه مشخص می‌شود $p^S = \prod_{t=0}^{T-1} P_{+}^{sv} \ \forall = \epsilon S$
P_{jt}^S	قیمت منصفانه‌ی ورق قرضه‌ی j در سناریوی S در مرحله‌ی t
f_{jt}^S	جریان نقدی تولید شده از ورق قرضه‌ی j تحت سناریوی s در مرحله‌ی t
$\delta_1 \geq 0$	دامنك نرخ سپرده نسبت به نرخ بهره
$\delta_2 \geq 0$	دامنك نرخ وام نسبت به نرخ بهره
ξ_{jt}^s, ξ_{et}^s	قیمت فروش ورق قرضه‌ی j در مرحله t=0
$\zeta_{jt}^s, \zeta_{et}^s$	قیمت خرید ورق قرضه‌ی j در مرحله t=0
V_t	منفعت (زیان) سرمایه
Δ	درصد انحراف از دیرش دلاری موردنظر
D*	دیرش دلاری موردنظر

متغیرهای تصمیم مرحله‌ی اول

b_0	موجودی نقد اولیه
$b_j \geq 0$	موجودی اولیه‌ی ورق قرضه‌ی j (براساس ارزش اسمی)
$x_{jo} \geq 0$	ارزش اسمی ورق قرضه‌ی j که در مرحله‌ی t=0 خریداری می‌شود.
$y_{jo} \geq 0$	ارزش اسمی ورق قرضه‌ی j که در مرحله‌ی t=0 فروخته می‌شود.
$z_{jo} \geq 0$	ارزش اسمی ورق قرضه‌ی j که در مرحله t=0 نگهداری می‌شود.

متغیرهای تصمیم مرحله‌ی دوم

$x_{jt}^{s} \geq 0$	ارزش اسمی ورق قرضه‌ی j که در مرحله‌ی t تحت سناریوی S خریداری می‌شود.
$y_{jt}^{s} \geq 0$	ارزش اسمی ورق قرضه‌ی j که در مرحله‌ی t تحت سناریوی Sفروخته می‌شود.
$z_{jt}^{s} \geq 0$	ارزش اسمی ورق قرضه‌ی j که در مرحله‌ی t تحت سناریوی Sنگهداری می‌شود.
$y_{t}^{+s} \geq 0$	مبلغ وام‌دهی در مرحله‌ی t=1
$y_{t}^{-s} \geq 0$	مبلغ وام‌گیری در مرحله‌ی t=1
y_{T}^{s}	مانده‌ی حساب بانکی در مرحله‌ی نهایی T تحت سناریوی S یعنی: $y_{T}^{+s} - y_{T}^{-s}$

محدودیت موجودی مرحله‌ی اول

متغیرهای تصمیم مرحله‌ی اول باید محدودیت موجودی زیر را تأمین کنند.

$$y_j + z_{j0} = b_j + x_j \quad \forall j,$$

محدودیت بودجه مرحله‌ی اول

متغیرهای تصمیم مرحله‌ی اول باید محدودیت بودجه‌ی زیر را تأمین کنند.

$$y_0^+ + \sum_j \zeta_{j0} x_j = b_0 + \sum_j \xi_{j0} y_j$$

محدودیت موجودی مرحله‌ی دوم

متغیرهای تصمیم مرحله‌ی دوم باید محدودیت موجودی زیر را تأمین کنند.

$$z_{jt}^{s} + y_{jt}^{s} = z_{j,t-1}^{s} + x_{jt}^{s} \quad \forall j, s, t \geqslant 1$$

محدودیت بودجه‌ی مرحله‌ی دوم

متغیرهای تصمیم مرحله‌ی دوم باید محدودیت بودجه‌ی زیر را تأمین کنند.

$$\sum_j \xi^s_{jt} y^s_{jt} + \sum_j f^s_{jt} z^s_{j,t-1} + (1 - \delta_1 + r^s_{t-1}) y^{+s}_{t-1} + y^{-s}_t$$
$$= L_t + \sum_j \zeta^s_{jt} x^s_{jt} + (1 + \delta_2 + r^s_{t-1}) y^{-s}_{t-1} + y^{+s}_t, \ \forall s, t,$$

سایر محدودیت‌های اختیاری

- محدودیت زیان یا منفعت سرمایه‌ی اوراق قرضه

$$\sum_{j} |\xi_{j,t-1}^{s} - \xi_{jt}^{s}|\, y_{jt}^{s} \leqslant V_t \quad \forall s, t.$$

- محدودیت دیرش اوراق قرضه

$$D^* - \Delta \cdot D^* \leqslant \sum_{i=1}^{J} z_{0j} D_j \leqslant D^* + \Delta \cdot D^*$$

  - که

$$D_j = \sum_{t=1}^{\tau} \frac{t f_{jt}}{(1+\hat{r}_j)^{t+1}}, \quad j = 1, \ldots J,$$

  - و

$$D^* = \sum_{j=1}^{J} b_{0j} D_j,$$

سایر محدودیت‌ها

$$y_j x_j = 0 \; \forall j, \quad y_{jt}^{s} x_{jt}^{s} = 0 \; \forall j, t, s, \quad y_t^{+s} y_t^{-s} = 0 \; \forall t, s$$

با تشکر