دانشگاه علامه طباطبائی

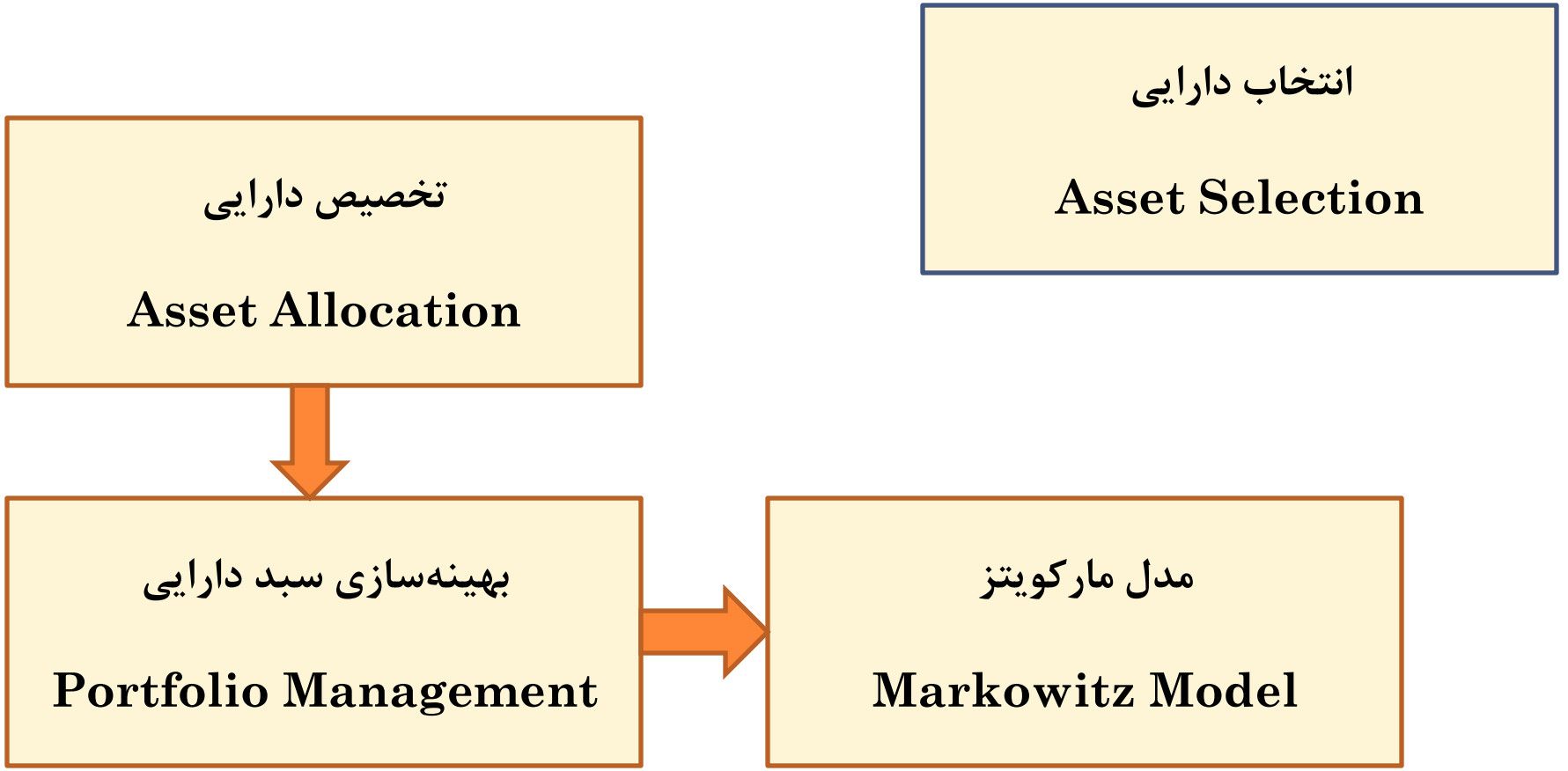
درس اقتصاد مالی (دورهٔ دکترا)

بهینه‌سازی سبد دارایی با استفاده از مدل مارکویتز

حسین عبده‌تبریزی
میثم رادپور
هادی لاری

۲۵ فروردین ۱۳۹۳

مدیریت دارایی



مرحلهٔ اول: داده‌ها را تعیین کنید

- داده‌های تاریخی دارایی‌های انتخاب‌شده را جمع‌آوری کنید. در مثال فعلی، سبد شامل ۵ دارایی است: طلا – دلار ایالات‌متحده – پتروشیمی – بانک – خودرو. دارایی‌ها نباید بازده یکسان یا هم‌بستگی کامل (مثبت یا منفی) داشته باشند.
- داده‌ها را تعدیل کنید تا با یکدگر قابل‌مقایسه باشد:
- تعدیل زمانی (روزهای تعطیل و غیرمعاملاتی) با توجه به بازده و هم‌بستگی میان دارایی‌ها.
- محاسبهٔ کل بازده سهامداران (TRS) و افزدون سود نقدی.
- تعدیل افزایش سرمایه.
- تناوب داده‌ها را با توجه به افق مدیریت سبد (روزانه، ماهانه و ...) انتخاب کنید.

مرحلهٔ دوم: محاسبهٔ ورودی‌های مدل

- اگر تنها ۲ دارایی داشتیم، محاسبات به‌سادگی قابل‌انجام بود. در فضای بیش از دو دارایی (مثلاً ۵ دارایی)، باید برای انجام محاسبات از ماتریس‌ها استفاده کنیم.
- متوسط بازده تاریخی هریک از دارایی‌ها را تعیین کنید. (ماتریس μ ۵×۱)

Fx = AVERAGE

- انحراف از معیار هریک از دارایی‌ها را تعیین کنید. (ماتریس σ ۵×۵)

Fx = STDEV.P

- هم‌بستگی میان دارایی‌های سبد را محاسبه کنید. (ماتریس متقارن ρ ۵×۵)
- Fx = CORREL

مرحلهٔ دوم: محاسبهٔ ورودی‌های مدل

- ماتریس یک‌ها را برای استفادهٔ بعدی شکل دهید. (ماتریس I ۵×۱)
- ماتریس متقارن واریانس_کوواریانس را از فرمول $V = \sigma \times \rho \times \sigma$ محاسبه کنید.

  Fx = MMULT (ماتریس V ۵×۱)
- معکوس ماتریس واریانس_کوواریانس را برای استفادهٔ بعدی محاسبه کنید. (ماتریس

  Fx = MINVERSE (V^{-1} ۵×۱)

مرحلهٔ سوم: حل معادله برای کم‌ترین ریسک

- ابتدا سبد دارایی ریسک‌گریزترین فرد را پیدا می‌کنیم Min Variance Portfolio – MVP:
- برای این منظور باید واریانس سبد هدف ($W'VW$) کمینه شود. (W همان ماتریس اوزان است)
- به شرط آن‌که مجموع اوزان از ۱ بیش‌تر نشود: $W'I = 1$. آیا W می‌تواند منفی باشد؟
- و حاصل‌ضرب اوزان در بازده، بازده هدف را ایجاد کند: $W'*\mu = \mu_p$
- به کمک تابع لاگرانژ خواهیم داشت:

$$L = 0.5W'VW + \lambda\,(\mu_p - W'\mu) + \gamma\,(1-W'I)$$

مرحلهٔ سوم: حل معادله برای کم‌ترین ریسک

- اگر معادلهٔ صفحهٔ قبل را حل کنیم، λ و γ برابر خواهد بود با:

$$\begin{matrix}\lambda \\ \gamma\end{matrix} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} C & -A \\ -A & B \end{bmatrix}\begin{matrix}\mu_p \\ 1\end{matrix}$$

- در ماتریس بالا:

$$A = \mu' V^{-1} I$$

$$B = \mu' V^{-1} \mu$$

$$C = I' V^{-1} I$$

$$D = BC - A^2$$

مرحلهٔ سوم: حل معادله برای کم‌ترین ریسک

- اگر $\lambda = 0$ باشد، آن‌گاه در سبد mvp:

$$W_{mvp} = (V^{-1}I) / C$$

$$\mu_{mvp} = A / C$$

$$VAR_{mvp} = 1/C$$

- اگر باشد، $\gamma = 0$ آن‌گاه : ماتریس zc

مرحلهٔ چهارم: تعیین سطوح مختلف بازده

می‌توان اثبات کرد که W_p و μ_p تابع رابطه‌ای خطی هستند:

$$W_p = g + \mu_p h$$

$$g = 1/D\ (B(V^{-1}I) - A(V^{-1}\mu))$$

$$h = 1/D\ (B(V^{-1}\mu) - A(V^{-1}I))$$

بنابراین، با تغییر مقادیر هدف μ_p می‌توان W_p را محاسبه کرد.

مرحلهٔ پنجم: قیمت و اندازهٔ ریسک

اگر λ و γ را صفر فرض نکنیم (سطح ریسک بالاتر از mvp)، آنگاه:

$$\lambda = \frac{C\mu_p - A}{D}$$

$$\gamma = \frac{B - A\mu_p}{D}$$

بنابراین، میتوان نسبت هر دارایی به کل سبد را نمایش داد:

$$E[R_i] = -\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right) + \left(\frac{1}{\lambda}\right)\sum \sigma_{ij} W_{ip}$$

نرخ بدون ریسک

قیمت ریسک

اندازهٔ ریسک غیرقابل اجتناب

مرحلهٔ ششم: رسم سبدهای بهینه

برای سطوح مختلف بازده، ریسک را محاسبه کرده و سبدهای بهینه را ترسیم کنید:

$$\sigma^2{}_p = \left(\frac{1}{D}\right)\left(C\mu^2{}_p - 2A\mu_p + B\right)$$

با تشکر از توجه شما